材料の力学 1　Step2,3　第 11 回演習問題（2018/7/10 実施）

[1] 図 1 に示すように右端が壁に固定された長さ $2L$ のはりに分布荷重 p が作用している．このとき以下の問いに答えよ．ただし，はりの曲げ剛性は EI とする．

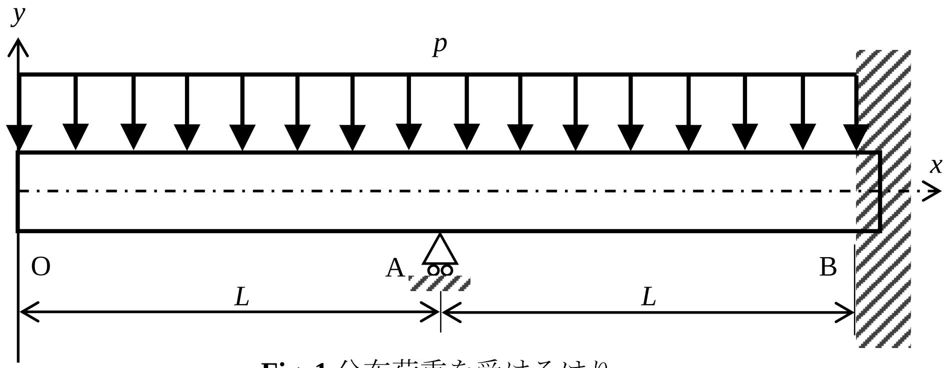

Fig. 1 分布荷重を受けるはり

(1) はり全体の FBD を描き，曲げモーメント $M(x)$を特異関数表示せよ．ただし，A 点の支点反力は R_A とする．

(2) A 点の支点からの反力 R_A，B 点の壁からの反力 R_B と反モーメント M_B を求めよ．

(3) はりのたわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$を表す式を求めよ．

(4) O 点に生じるたわみ v_O を求めよ．

[1]

(1) はり全体の FBD を描き，曲げモーメント $\boldsymbol{M(x)}$を特異関数表示せよ．ただし，A 点の支点反力は $\boldsymbol{R_A}$ とする．

点 B での反力 R_B，反モーメント M_B をおくと，はり全体の FBD は以下のようになる．

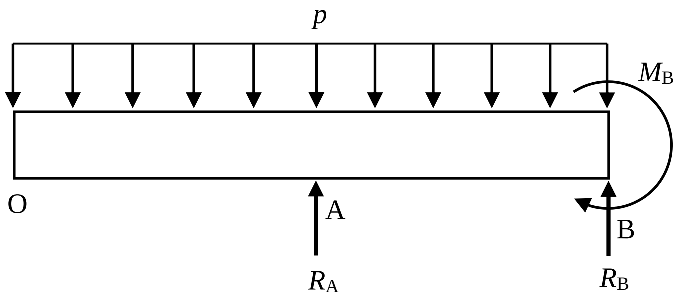

Fig.1.1 はり全体のFBD.

$M(x)$を特異関数表示すると，

$$M(x)=\frac{p}{2}\langle x\rangle^2-R_A\langle x-L\rangle^1 \tag{1.1}$$

(2) A点の支点からの反力$\boldsymbol{R_A}$，B点の壁からの反力$\boldsymbol{R_B}$と反モーメント$\boldsymbol{M_B}$を求めよ．

図1.1より，力のつり合いから，

$$R_A+R_B-2pL=0 \tag{1.2}$$

点Bまわりのモーメントのつり合いより，

$$-2pL^2+R_AL+M_B=0 \tag{1.3}$$

また，はりとたわみの関係式から，式(1.1)より，

$$\begin{aligned}-EIv''&=M(x)\\&=\frac{p}{2}\langle x\rangle^2-R_A\langle x-L\rangle^1\end{aligned} \tag{1.4}$$

次にC_1，C_2を積分定数として，式(1.6)の両辺を2回積分する．

$$-EIv'=\frac{p}{6}\langle x\rangle^3-\frac{1}{2}R_A\langle x-L\rangle^2+C_1 \tag{1.5}$$

$$-EIv=\frac{p}{24}\langle x\rangle^4-\frac{1}{6}R_A\langle x-L\rangle^3+C_1x+C_2 \tag{1.6}$$

よって，はりのたわみv のx方向変化を$v(x)$ とおき，境界条件について考える．
点Aでは単純支持なので，

$$v(L)=0 \tag{1.7}$$

点 B では固定端なので，

$$\begin{aligned} v(2L)&=0 \\ v'(2L)&=0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

式(1.8)を式(1.5)に代入して，

$$0=\frac{4}{3}pL^3-\frac{1}{2}R_{\mathrm{A}}L^2+C_1$$

$$\therefore C_1=-\frac{4}{3}pL^3+\frac{1}{2}R_{\mathrm{A}}L^2 \tag{1.9}$$

式(1.9)から，式(1.7)，(1.8)を式(1.6)に代入して，

$$0=\frac{p}{24}L^4+(-\frac{4}{3}pL^3+\frac{1}{2}R_{\mathrm{A}}L^2)L+C_2$$

$$0=\frac{2}{3}pL^4-\frac{1}{6}R_{\mathrm{A}}L^3+(-\frac{8}{3}pL^3+R_{\mathrm{A}}L^2)L+C_2$$

$$\therefore R_{\mathrm{A}}=\frac{17}{8}pL \tag{1.10}$$

$$C_2=\frac{11}{48}pL^4 \tag{1.11}$$

式(1.10)を式(1.2)，(1.3)に代入して，

$$R_{\mathrm{B}}=-\frac{1}{8}pL \tag{1.11.}$$

$$M_{\mathrm{B}}=-\frac{1}{8}pL^2 \tag{1.13}$$

以上まとめて，

$$\left(R_{\mathrm{A}},\quad R_{\mathrm{B}},\quad M_{\mathrm{B}}\right)=\left(\frac{17}{8}pL,\ -\frac{1}{8}pL,\ -\frac{1}{8}pL^3\right) \tag{1.14}$$

と求められる．

(3) はりのたわみ角 *v'*(*x*)，たわみ *v*(*x*)を表す式を求めよ．

式(1.9)，(1.10)より，

$$C_1 = -\frac{13}{48}pL^3 \tag{1.13}$$

よって，式(1.5)，(1.6)に式(1.10)，(1.11)，(1.13)を代入して，

$$v'(x) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{p}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{17}{16}pL\langle x-L\rangle^2 - \frac{13}{48}pL^3\right) \tag{1.14}$$

$$v(x) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{p}{24}\langle x\rangle^4 - \frac{17}{48}pL\langle x-L\rangle^3 - \frac{13}{48}pL^3x + \frac{11}{48}pL^4\right) \tag{1.15}$$

(4) O 点に生じるたわみ v_O を求めよ．

式(1.15)に， $x=0$ を代入して，

$$v_{\mathrm{O}} = v(0) = -\frac{11pL^4}{48EI} \tag{1.16}$$

[2] 図 2 に示すような長さ 4L の両持ちはりに集中荷重 P が A 点と C 点で作用している．また，はりの断面は図 3 に示す形状となっている．この時，以下の問いに答えよ．

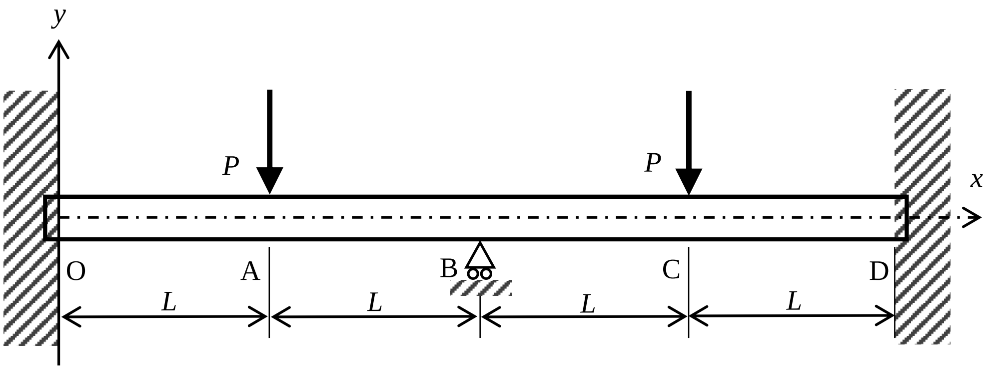

Fig.2 両持ちはり

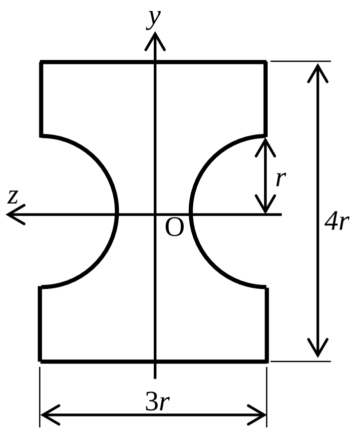

Fig.3 はり断面図

(1) はりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

以下の問いでは曲げ剛性を EI として答えよ．

(2) 壁からの反力，反モーメントをそれぞれ R_O，R_D および M_O，M_D，B 点からの支点反力を R_B として，はり全体の FBD を描け．また，はり全体での力のつり合い式，モーメントのつり合い式を求めよ．

(3) 対称性を考慮して OB 間の曲げモーメント $M(x)$について特異関数表示せよ．このとき，B 点での反力は $R_B/2$ となることに注意せよ．

(4) 境界条件を考慮して R_O，R_B，R_D，M_O，M_D を求めよ．

(5) はりに最大たわみが生じる位置を示し，最大たわみ v_{max} を求めよ．

[2]

(1) はりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

全体の断面二次モーメントは，以下の図に示すように部材 A と部材 B に分け，部材 A の断面二次モーメントより部材 B の断面二次モーメントを引くことで求まる．

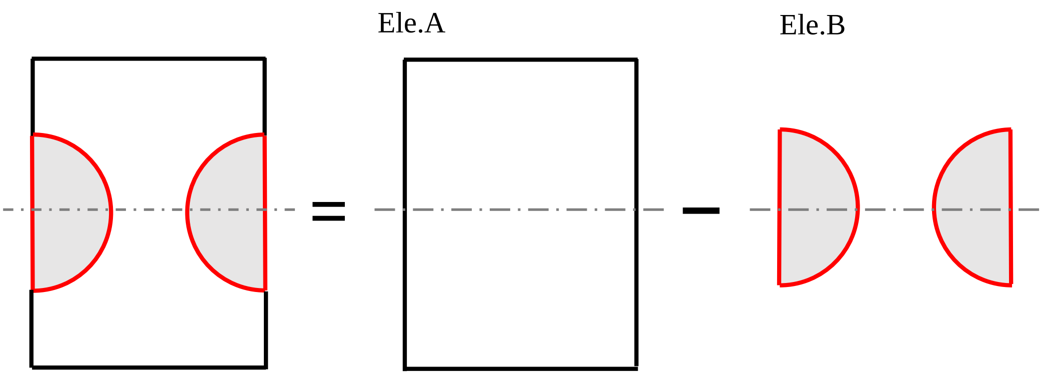

Fig.2.1 部材の分解図

それぞれの部材における断面二次モーメント I_z を求める．

i) 部材 A について

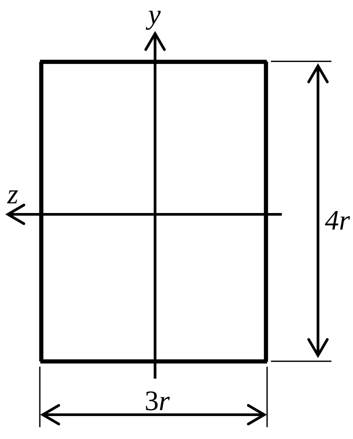

Fig.2.2 部材 A

長方形より，部材 A における z 軸に関する断面二次モーメント I_{ZA} は次のように求まる．

$$I_{ZA} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3r \cdot (4r)^3}{12} = 16r^4 \tag{2.1}$$

ii) 部材 B について

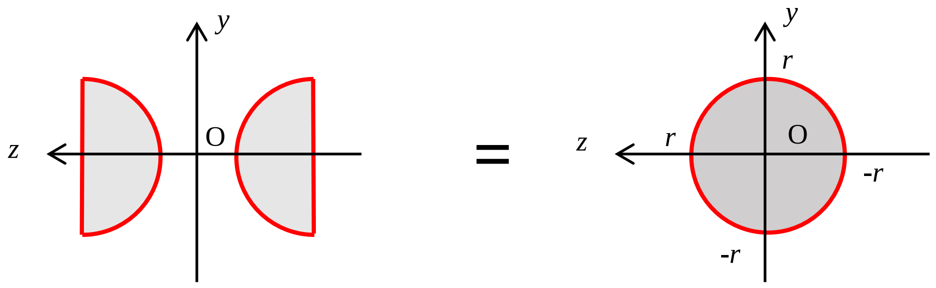

Fig.2.3 部材 B

円形より，部材 B における z 軸に関する断面二次モーメント I_{ZB} は次のように求まる.

$$I_{ZB} = \frac{\pi r^4}{4} \tag{2.2}$$

式(2.2)，(2.4)より，求める断面 2 次モーメント I_z は,

$$I_z = I_{ZA} - I_{ZB} = 16\mathrm{r}^4 - \frac{\pi r^4}{4} \tag{2.3}$$

(別解)

図 2.1 にはりの z 軸に関する断面 2 次モーメントを求める.

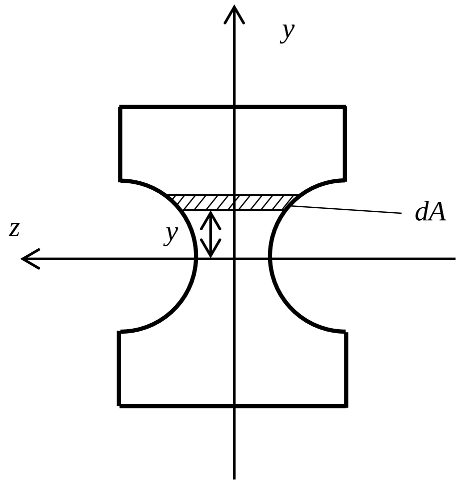

Fig.2.4 はりの断面 2 次モーメントの計算

上図における微小面積 dA は,

$$dA = \begin{cases} \left(3r - 2\sqrt{r^2 - y^2}\right)dy & (-r \le y \le r) \\ 3rdy & (-2r \le y \le -r, \quad r \le y \le 2r) \end{cases} \tag{2.4}$$

よって断面 2 次モーメント I_z は,

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA \\ &= \int_{-2r}^{-r} 3ry^2 dy + \int_{-r}^{r} \left(3r - 2\sqrt{r^2 - y^2}\right) y^2 dy + \int_{r}^{2r} 3ry^2 dy \\ &= \int_{-2r}^{2r} 3ry^2 dy - \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - y^2}\, y^2 dy \\ &= 16\mathrm{r}^4 - \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - y^2}\, y^2 dy \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで右辺第二項について,

$$y = r\sin\theta \tag{2.6}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - y^2}\, y^2 dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r^4 \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} r^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi r^4}{4} \end{aligned} \tag{2.7}$$

式(2.5), (2.7)より，求める断面 2 次モーメント I_z は,

$$I_z = 16\mathrm{r}^4 - \frac{\pi r^4}{4} \tag{2.8}$$

(2) 壁からの反力，反モーメントをそれぞれ $\boldsymbol{R}_{\mathbf{O}}$, $\boldsymbol{R}_{\mathbf{D}}$ および $\boldsymbol{M}_{\mathbf{O}}$, $\boldsymbol{M}_{\mathbf{D}}$, **B** 点からの支点反力を $\boldsymbol{R}_{\mathbf{B}}$ として，はり全体の **FBD** を描け．また，はり全体での力のつり合い式，モーメントのつり合い式を求めよ．

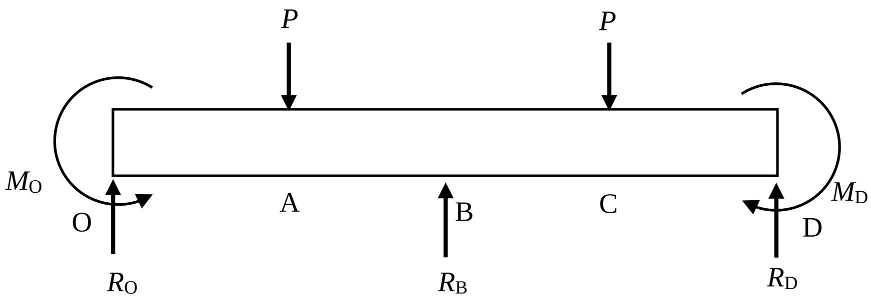

Fig.2.5 はり全体のFBD.

力のつり合いより,

$$R_{\mathrm{O}} + R_{\mathrm{B}} + R_{\mathrm{D}} - 2P = 0 \tag{2.9}$$

点 O まわりのモーメントのつり合いより,

$$-M_{\mathrm{O}} + P \cdot L - R_{\mathrm{B}} \cdot 2L + P \cdot 3L - R_{\mathrm{D}} \cdot 4L + M_{\mathrm{D}} = 0$$
$$\therefore -M_{\mathrm{O}} - 2R_{\mathrm{B}}L - 4R_{\mathrm{D}}L + M_{\mathrm{D}} + 4PL = 0 \tag{2.10}$$

(3) 対称性を考慮して OB 間の曲げモーメント *M*(*x*)について特異関数表示せよ. このとき, B 点での反力は $R_{\mathrm{B}}/2$ となることに注意せよ.

対称性を考慮して, $0 \leqq x \leqq 2L$ での FBD は以下のようになる.

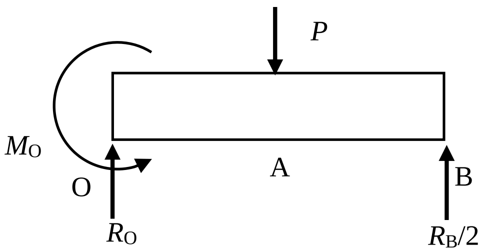

Fig.2.6 $0 \leqq x \leqq 2L$ でのFBD.

力のつり合いより,

$$R_{\mathrm{O}} + \frac{1}{2}R_{\mathrm{B}} - P = 0 \tag{2.11}$$

$M(x)$を特異関数表示すると,

$$M(x) = M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^0 - R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1 + P\langle x - L\rangle^1 \tag{2.12}$$

(4) 境界条件を考慮して $\boldsymbol{R_{\mathrm{O}}}$，$\boldsymbol{R_{\mathrm{B}}}$，$\boldsymbol{R_{\mathrm{D}}}$，$\boldsymbol{M_{\mathrm{O}}}$，$\boldsymbol{M_{\mathrm{D}}}$ を求めよ．

はりとたわみの関係式から，式(2.12)より，

$$
\begin{aligned}
-EI\nu'' &= M(x) \\
&= M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^0 - R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1 + P\langle x-L\rangle^1
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

次にC_1，C_2を積分定数として，式(2.13)の両辺を2回積分する．

$$
-EI\nu' = M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1 - \frac{1}{2}R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^2 + \frac{1}{2}P\langle x-L\rangle^2 + C_1 \tag{2.14}
$$

$$
-EI\nu = \frac{1}{2}M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^2 - \frac{1}{6}R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^3 + \frac{1}{6}P\langle x-L\rangle^3 + C_1 x + C_2 \tag{2.15}
$$

よって，はりのたわみν のx方向変化を$\nu(x)$ とおき，境界条件について考える．
点Oでは固定端なので，

$$
\nu(0) = 0 \tag{2.16}
$$

$$
\nu'(0) = 0 \tag{2.17}
$$

点Bでは単純支持なので，

$$
\nu(2L) = 0 \tag{2.18}
$$

また，点Bでの対称性から，

$$
\nu'(2L) = 0 \tag{2.19}
$$

式(2.15)，(2.16)に式(2.17)，(2.18)をそれぞれ代入して，積分定数C_1，C_2は，

$$
C_1 = C_2 = 0 \tag{2.20}
$$

よって，式(2.15)に式(2.18)，(2.20)を代入して，

$$
\begin{aligned}
0 &= 2M_{\mathrm{O}}L^2 - \frac{4}{3}R_{\mathrm{O}}L^3 + \frac{1}{6}PL^3 \\
\therefore 2M_{\mathrm{O}}L^2 - \frac{4}{3}R_{\mathrm{O}}L^3 &= -\frac{1}{6}PL^3
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

また，式(2.14)に式(2.19)，(2.20)を代入して，

$$
0 = 2M_{\mathrm{O}}L - 2R_{\mathrm{O}}L^3 + \frac{1}{2}PL^3
$$

$$
\therefore 2M_{\mathrm{O}}L - 2R_{\mathrm{O}}L^3 = -\frac{1}{2}PL^3 \tag{2.22}
$$

式(2.11)，(2.21)，(2.22)より，

$$
\left(R_{\mathrm{O}}, R_{\mathrm{B}}, M_{\mathrm{O}}\right) = \left(\frac{1}{2}P, P, \frac{1}{4}PL\right) \tag{2.23}
$$

式(2.9)，(2.10)，(2.23)より，

$$
\left(R_{\mathrm{O}}, R_{\mathrm{B}}, R_{\mathrm{D}}, M_{\mathrm{O}}, M_{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{1}{2}P, P, \frac{1}{2}P, \frac{1}{4}PL, \frac{1}{4}PL\right) \tag{2.24}
$$

(5) はりに最大たわみが生じる位置を示し，最大たわみ $v_{\mathbf{max}}$ を求めよ．

式(2.15)，(2.16)，(2.24)より，$v'(x)$，$v(x)$ は以下のように表される．

$$
v'(x) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{PL}{4}\langle x\rangle^1 - \frac{P}{4}\langle x\rangle^2 + \frac{P}{2}\langle x-L\rangle^2\right) \tag{2.25}
$$

$$
v(x) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{PL}{8}\langle x\rangle^2 - \frac{P}{12}\langle x\rangle^3 + \frac{P}{6}\langle x-L\rangle^3\right) \tag{2.26}
$$

ここで式(2.25)より，

$$
v'(L) = 0 \tag{2.27}
$$

が成り立つので，点 A にて最大たわみが生じ，対称性から点 C でも最大たわみが生じる．よって，求める最大たわみ v_{max} は，式(2.26)に $x = L$ を代入して，

$$
v_{\mathrm{max}} = v(L) = -\frac{PL^3}{24EI} \tag{2.28}
$$