材料の力学 1　Step2,3　第 10 回演習問題（2018/7/3 実施）

[1] 図 1 に示すようなはりについて考える．両端（O 点，C 点）で単純支持されており，A 点，B 点には集中荷重 P が作用している．はり中央の，原点から $3L/2$ の点を点 M とする．はりの断面は直径 d の丸棒である．また，はりの弾性係数を E とする．このとき以下の問いに答えよ．

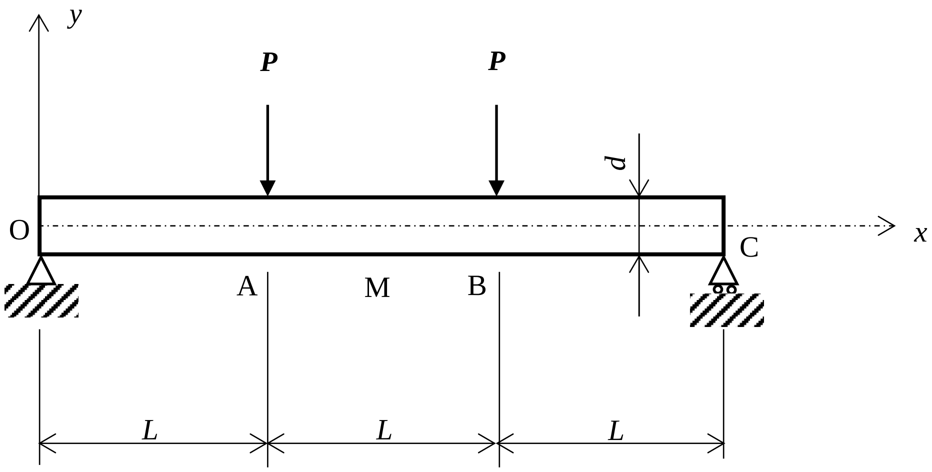

Fig.1 両端単純支持のはり

(1) はりの断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

以下の問題でははりの断面 2 次モーメントを I として解答せよ．

(2) 対称性に注意してはり全体の SFD，BMD を描け．

(3)点 O でのたわみ v_O，対称性に注意して点 M におけるたわみ角 v'_M，を求めよ．

(4) M 点におけるたわみ v_M を求めよ．

(1) はりの断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

図 1.1 に示す円形断面のはりの z 軸に関する断面 2 次モーメントを求める．

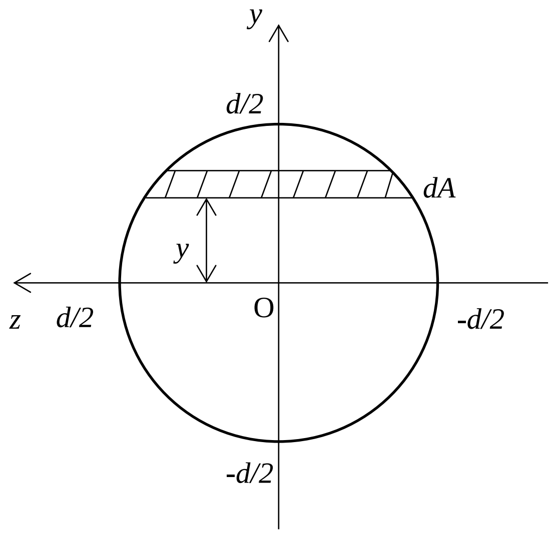

Fig.1.1　断面 2 次モーメントの計算

上図における微小面積 dA は

$$dA = 2\sqrt{\frac{d^4}{4} - y^2}\,dy \tag{1.1}$$

上図における断面 2 次モーメント I_z は

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 2y^2 \sqrt{\frac{d^2}{4} - y^2}\,dy \tag{1.2}$$

ここで,

$$y = \frac{d}{2}\sin\theta \tag{1.3}$$

と置き、積分変換すると

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cdot \frac{d^2}{4}\sin^2\theta \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{4}\sin^2\theta}\,\frac{d}{2}\cos\theta \right) d\theta \\ &= \frac{d^4}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 4\theta\right) d\theta = \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned} \tag{1.4}$$

となる．

(2) 対称性に注意してはり全体の SFD，BMD を描け.

対称性を考慮すると点 O における反力は点 C における反力は等しいので反力を *R*o と置くとはり全体の FBD は図 1.2 のようになる.

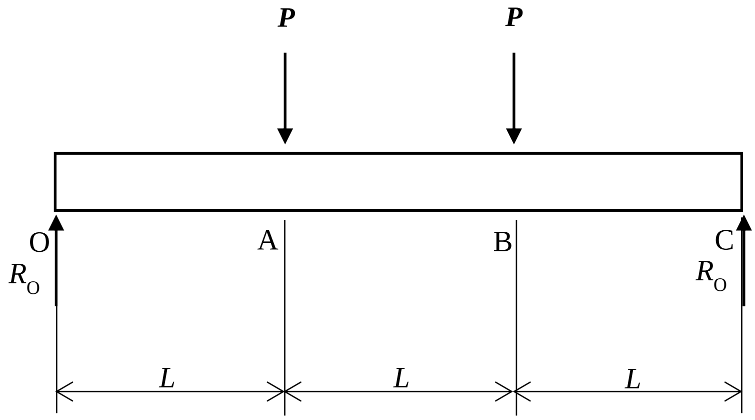

Fig.1.2　はり全体の FBD

力のつり合いと対称性より

$$
\begin{aligned}
&2R_O - 2P = 0 \\
&\therefore R_O = P
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

となる.

ここで対称性より $0 \le x < 3L/2$ で FBD を考える.

(i) $0 \le x < L$ の時

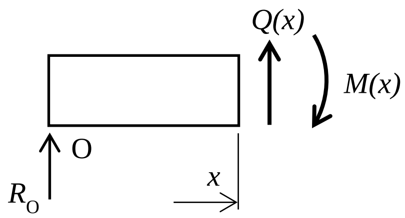

Fig.1.3 FBD

せん断力 *Q(x)*は力のつり合いより

$$
\begin{aligned}
&R_O + Q(x) = 0 \\
&\therefore Q(x) = -P
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

曲げモーメント *M(x)*は *x* でのモーメントのつり合いより

$$R_O x + M\left(x\right) = 0$$
$$\therefore M\left(x\right) = -Px \tag{1.7}$$

(ii) L$\le x <$3 *L*/2 の時

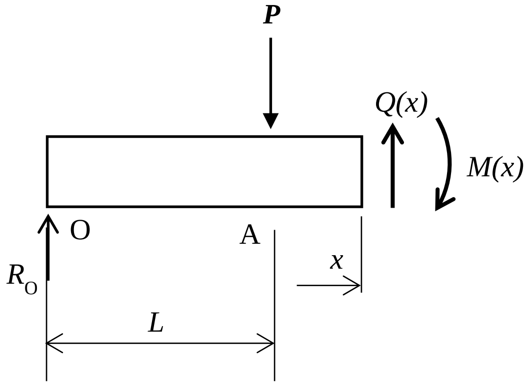

Fig.1.4 FBD

せん断力 *Q(x)*は力のつり合いより

$$R_O + Q\left(x\right) - P = 0$$
$$\therefore Q\left(x\right) = 0 \tag{1.8}$$

曲げモーメント *M(x)*は *x* でのモーメントのつり合いより

$$R_O x + M\left(x\right) - P\left(x - L\right) = 0$$
$$\therefore M\left(x\right) = -PL \tag{1.9}$$

以上より SFD，BMD は以下のようになる．

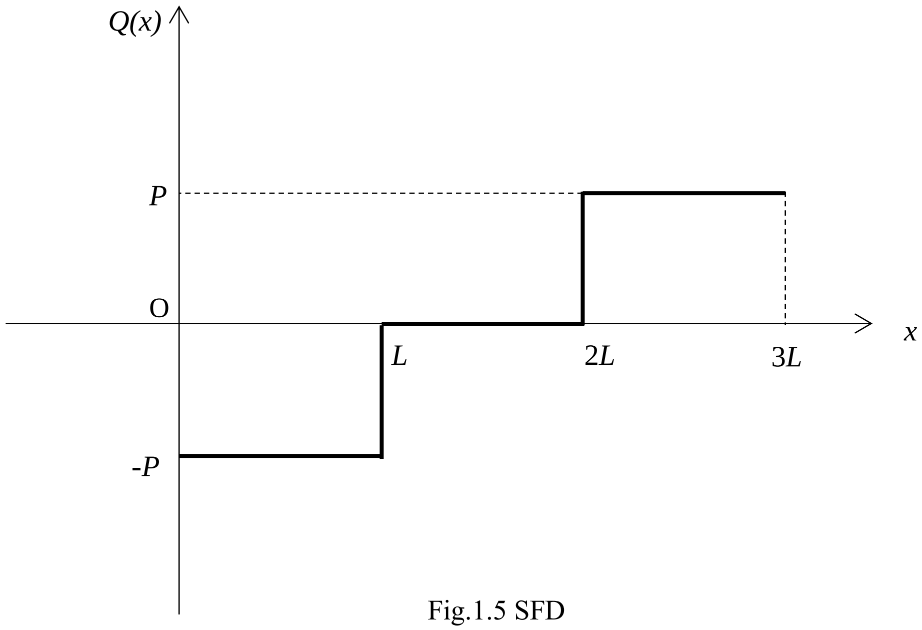

Fig.1.5 SFD

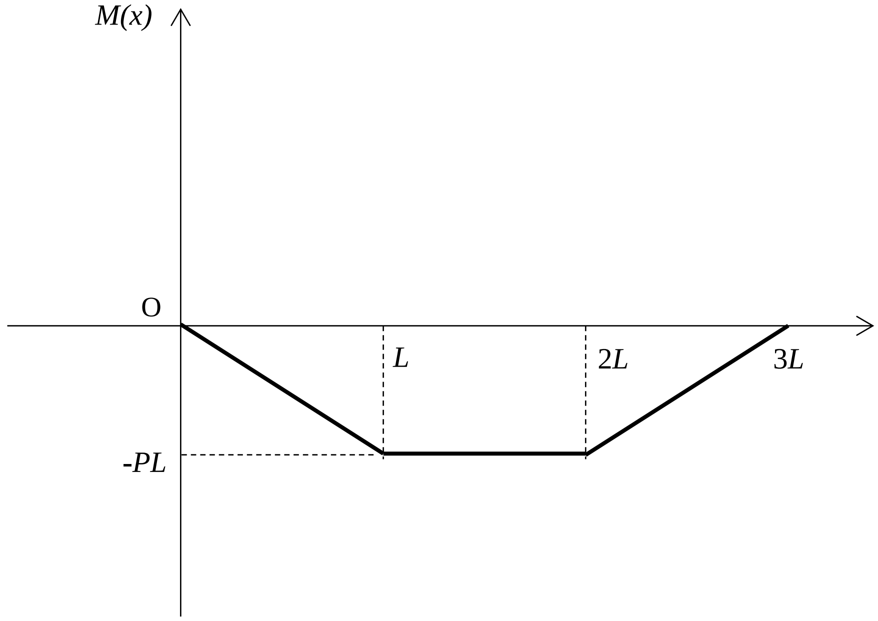

Fig.1.6 BMD

(3)点 O でのたわみ v_{O}，対称性に注意して点 M におけるたわみ角 v'_{M}，を求めよ．

点 O では支持されているため，たわみ v は

$$v_{\mathrm{O}} = 0 \tag{1.10}$$

点 M では左右対称でかつはりが折れ曲がっていないため，たわみ角 v' は

$$v'_{\mathrm{M}} = 0 \tag{1.11}$$

(4) M 点におけるたわみ v_{M} を求めよ．

OA 間のたわみを $v_1(x)$，AM 間のたわみを $v_2(x)$とする．

たわみの基礎式は

$$-EIv''(x) = M(x) \tag{1.12}$$

と表される．区間ごとに積分してたわみをもとめる．

(i) $0 \le x < L$ の時

式(1.7)より

$$-EIv_1''(x) = -Px \tag{1.13}$$

となる．これを積分して

$$v_1'(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Px^2+C_1\right) \tag{1.14}$$

$$v_1(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Px^3+C_1x+C_2\right) \tag{1.15}$$

となる．

(ii) L $\leq x <3\,L/2$ の時

式(1.9)より

$$-EIv_2''(x)=-PL \tag{1.16}$$

となる．これを積分して

$$v_2'(x)=\frac{1}{EI}\left(PLx+C_3\right) \tag{1.17}$$

$$v_2(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PLx^2+C_3x+C_4\right) \tag{1.18}$$

となる．

ここで式(1.10)より，

$$\begin{gathered} v_1(0)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}P\cdot 0^3+C_1\cdot 0+C_2\right)=0 \\ \therefore C_2=0 \end{gathered} \tag{1.19}$$

また，式(1.11)より，

$$\begin{gathered} v_2'\left(\frac{3L}{2}\right)=\frac{1}{EI}\left(PL\cdot\frac{3L}{2}+C_3\right)=0 \\ \therefore C_3=-\frac{3}{2}PL^2 \end{gathered} \tag{1.20}$$

はりは点 A で連続しているので $v_1(L)=v_2(L)$ かつ $v'_1(L)=v'_2(L)$であるため

$$\begin{gathered} v_1'(L)=v_2'(L)=\frac{1}{EI}\left(PL^2-\frac{3}{2}PL^2\right)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PL^2+C_1\right) \\ \therefore C_1=-PL^2 \end{gathered} \tag{1.21}$$

$$\begin{gathered} v_1(L)=v_2(L) \\ =\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}PL^3-PL^3\right)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PL^3-\frac{3}{2}PL^3+C_4\right) \\ \therefore C_4=\frac{1}{6}PL^3 \end{gathered} \tag{1.22}$$

以上より AM 間のたわみは以下のように表される.

$$v(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PLx^2-\frac{3}{2}PL^2x+\frac{1}{6}PL^3\right) \tag{1.23}$$

ここに x=3L/2 を代入して点 M のたわみは

$$\begin{aligned}v\left(\frac{3}{2}L\right)&=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PL\left(\frac{3}{2}L\right)^2-\frac{3}{2}PL^2\left(\frac{3}{2}L\right)+\frac{1}{6}PL^3\right)\\&=-\frac{23}{24}\frac{PL^3}{EI}\\\therefore v_{\mathrm{M}}&=\frac{23}{24}\frac{PL^3}{EI}\end{aligned} \tag{1.24}$$

と求まる.

[2] 図のようなはりにおいて点 O では単純支持，点 A では壁に固定されており，荷重 P が作用している．はりの断面 2 次モーメント I_z，ヤング率を E として以下の問いに答えよ

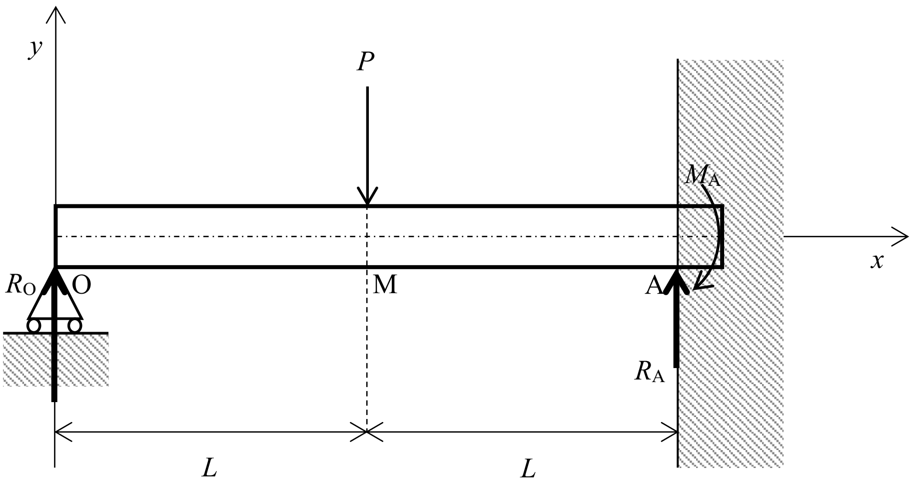

Fig.2 分布荷重を受ける一端固定，他単純支持はり．

(1) $0 \le x \le 2L$ において，曲げモーメント $M(x)$を R_O を用いて求めよ．

(2) 点 O，A での境界条件を求めよ．

(3) 反力 R_O，R_A および反モーメント M_A をそれぞれ求めよ．

(4) $0 \le x \le 2L$ において，SFD および BMD をそれぞれ描け．

(5) はりの最大たわみを求めよ．

[1]

(1) $0 \le x \le 2L$ において，曲げモーメント $M(x)$を R_O を用いて求めよ．

梁全体の FBD を図 2.1 に示す.

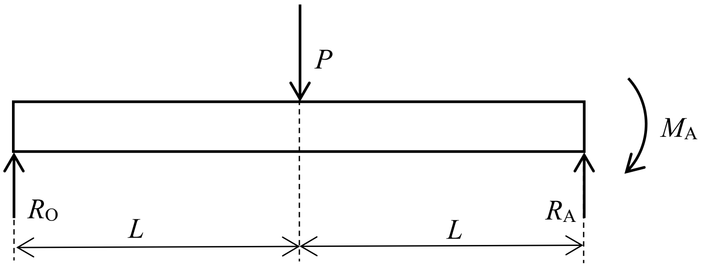

Fig.2.1 FBD.

力のつり合いおよびモーメントのつり合いより

$$R_O + R_A - P = 0 \tag{2.1}$$

$$PL - 2R_A L + M_A = 0 \tag{2.2}$$

それぞれの区間について FBD を描き，力のつり合い，モーメントのつり合いを考える.

(i) $0 \le x \le L$ のとき

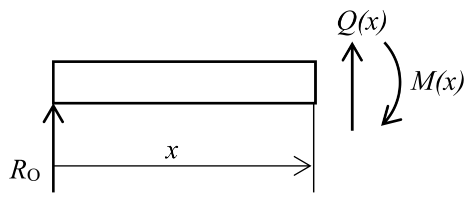

Fig.2.2 FBD($0 \le x \le L$).

力のつり合いより,

$$\begin{aligned} R_O + Q(x) &= 0 \\ Q(x) &= -R_O \end{aligned} \tag{2.3}$$

O 点周りのモーメントのつり合いより,

$$\begin{aligned} M(x) - Q(x) \cdot x &= 0 \\ M(x) &= -R_O x \end{aligned} \tag{2.4}$$

(ii) $L \le x \le 2L$ のとき

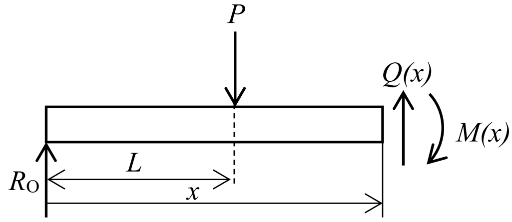

Fig.2.3 FBD($L \le x \le 2L$).

力のつり合いより，

$$R_O + Q(x) - P = 0$$
$$Q(x) = P - R_O \tag{2.5}$$

O 点周りのモーメントのつり合いより

$$M(x) - Q(x) \cdot x + PL = 0$$
$$M(x) = (P - R_O)x - PL \tag{2.6}$$

(2) 点 O，A での境界条件を求めよ．

点 O では単純支持なので，

$$x=0 \text{ のとき } v = 0 \tag{2.7}$$

点 A では固定端なので，

$$x=2L \text{ のとき } \begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = 0 \\ v = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

(3) 反力 R_O，R_A および反モーメント M_A をそれぞれ求めよ．

それぞれの区間でたわみ，たわみ角をそれぞれ求める．

(i) $0 \le x \le L$ のとき

たわみ角は式(2.4)より

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{EI_z}(-R_O x)$$
$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{EI_z}(-\frac{1}{2}R_O x^2 + C_1) \tag{2.9}$$

と表せる．たわみは

$$v = -\frac{1}{EI_z}(-\frac{1}{6}R_O x^3 + C_1 x + C_2) \tag{2.10}$$

と表せる．また境界条件式(2.7)より

$$0 = -\frac{1}{EI_z}(-\frac{1}{6}R_O \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2)$$
$$C_2 = 0 \tag{2.11}$$

よって，

$$v = -\frac{1}{EI_z}(-\frac{1}{6}R_O x^3 + C_1 x) \tag{2.12}$$

(ii) $L \le x \le 2L$のとき
たわみ角は式(2.6)より

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{EI_z}\left\{(P-R_{\mathrm{O}})x - PL\right\} \tag{2.13}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{EI_z}\left\{\frac{1}{2}(P-R_{\mathrm{O}})x^2 - PLx + C_3\right\}$$

と表せる．たわみは

$$v = -\frac{1}{EI_z}\left\{\frac{1}{6}(P-R_{\mathrm{O}})x^3 - \frac{1}{2}PLx^2 + C_3x + C_4\right\} \tag{1.14}$$

と表せる．境界条件式(2.8)より

$$0 = -\frac{1}{EI_z}\left\{\frac{1}{2}(P-R_{\mathrm{O}})(2L)^2 - PL(2L) + C_3\right\}$$

$$C_3 = 2R_{\mathrm{O}}L^2$$

$$0 = -\frac{1}{EI_z}\left\{\frac{1}{6}(P-R_{\mathrm{O}})(2L)^3 - \frac{1}{2}PL(2L)^2 + 2R_{\mathrm{O}}L^2 \cdot 2L + C_4\right\} \tag{2.15}$$

$$C_4 = \frac{2}{3}PL^3 - \frac{8}{3}R_{\mathrm{O}}L^3$$

と表せる．よって式(2.13)と式(2.14)はそれぞれ以下のように表せる．

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= -\frac{1}{EI_z}\left\{\frac{1}{2}(P-R_{\mathrm{O}})x^2 - PLx + 2R_{\mathrm{O}}L^2\right\} \\ v &= -\frac{1}{EI_z}\left\{\frac{1}{6}(P-R_{\mathrm{O}})x^3 - \frac{1}{2}PLx^2 + 2R_{\mathrm{O}}L^2x + \frac{2}{3}PL^3 - \frac{8}{3}R_{\mathrm{O}}L^3\right\} \end{aligned} \tag{2.16}$$

一方，梁のたわみ角とたわみは連続であるので，x=L においてたわみ角とたわみは等しくなる．

$$x=L \text{ のとき} \begin{cases} \dfrac{dv_L}{dx} = \dfrac{dv_L}{dx} \\ v_L = v_L \end{cases} \tag{2.17}$$

式(2.10)，(2.16)より

$$-\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{2}R_{\mathrm{O}}L^2 + C_1\right) = -\frac{1}{EI_z}\left\{\frac{1}{2}(P-R_{\mathrm{O}})L^2 - PL\cdot L + 2R_{\mathrm{O}}L^2\right\} \tag{2.18}$$

と表せる．また，式(2.13)，(2.16)より

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{EI_z}(-\frac{1}{6}R_{\mathrm{O}}L^3 + C_1 x) \\
&= -\frac{1}{EI_z}\left\{\frac{1}{6}(P-R_{\mathrm{O}})L^3 - \frac{1}{2}PL\cdot L^2 + 2R_{\mathrm{O}}L^2\cdot L + \frac{2}{3}PL^3 - \frac{8}{3}R_{\mathrm{O}}L^3\right\}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

式(2.18)，(2.19)の連立方程式を解くことでC_1， R_{O}を求めることができる．

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{8}PL^2 \\
R_{\mathrm{O}} &= \frac{5}{16}P
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

また，式(2.1)より

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{16}P + R_{\mathrm{A}} &= P \\
R_{\mathrm{A}} &= \frac{11}{16}P
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

と求められる．また，式(2.2)より

$$
\begin{aligned}
PL - 2R_{\mathrm{A}}L + M_{\mathrm{A}} &= 0 \\
M_{\mathrm{A}} &= \frac{3}{8}PL
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

と求められる．

(4) $0 \le x \le 2L$において，SFD および BMD をそれぞれ描け．
(3)で求めた反力R_{O}を式(2.3)，(2.4)，(2.5)，(2.6)に代入すると
(i) $0 \le x \le L$のとき

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= -\frac{5}{16}P \\
M(x) &= -\frac{5}{16}Px
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

(ii) $L \le x \le 2L$のとき

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{11}{16}P \\
M(x) &= \frac{11}{16}Px - PL
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

と表せるので，SFD，BMD は以下のようになる．

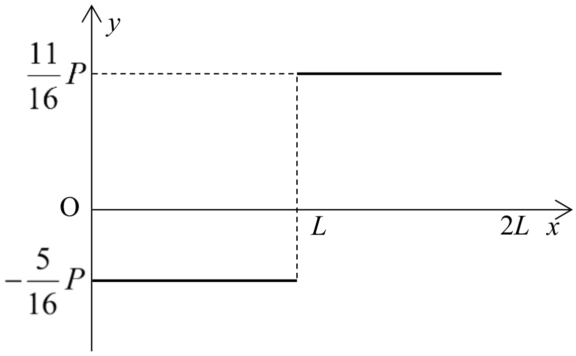

Fig.2.4 SFD.

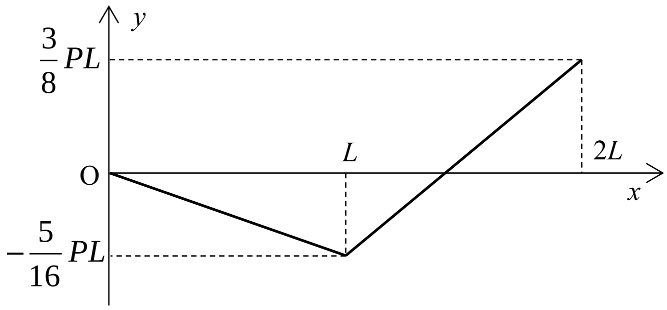

Fig.2.5 BMD.

(5)　はりの最大たわみ$v_{\max}$を求めよ．

たわみ角が 0 のとき，たわみが最大となるので

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{2}R_{\mathrm{O}}x^2 + \frac{1}{8}PL^2\right)$$

$$0 = -\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{16}Px^2 + \frac{1}{8}PL^2\right) \tag{2.25}$$

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5}L$$

のときに最大たわみをとる．

ゆえに，大たわみ$v_{\max}$は

$$v_{\max} = -\frac{1}{EI_z}\left\{-\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{16}P\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}L\right)^3 + \frac{1}{8}PL^2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}L\right)\right\}$$

$$v_{\max} = \frac{\sqrt{5}PL^3}{30EI_z} \tag{2.26}$$