材料の力学 1　Step2　第 9 回演習問題（6/26 実施）

[1] 以下に示す図形の断面二次モーメント I_z をそれぞれ求めよ．なお y，z 軸はそれぞれ図心を通る軸とする．

(1)

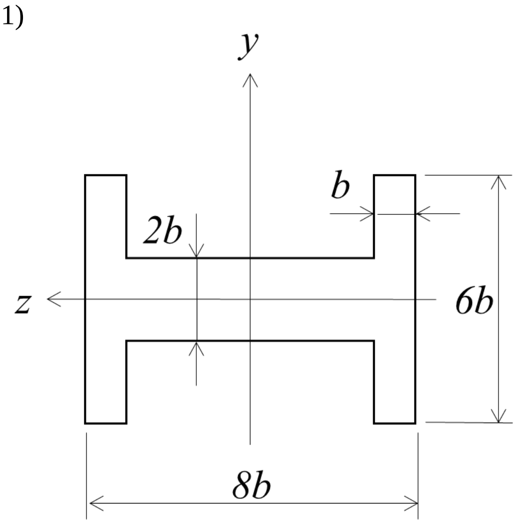

Fig.1.1

(2)

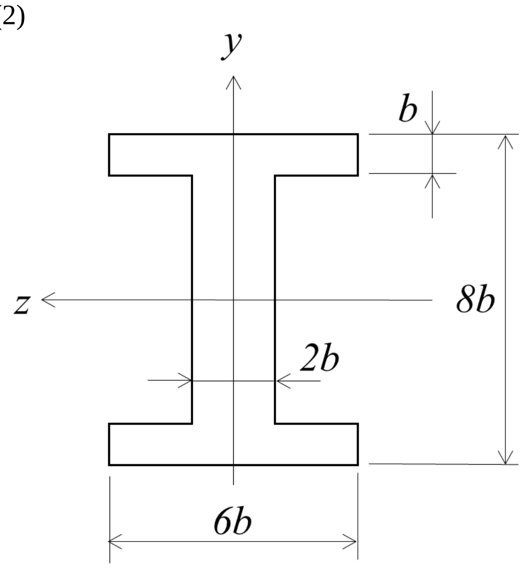

Fig.1.2

(3)

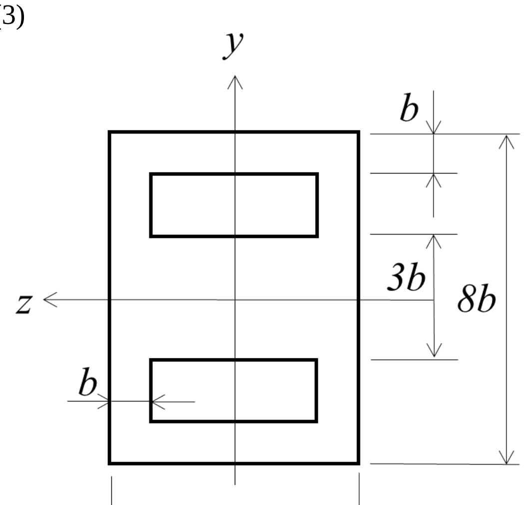

Fig.1.3

(4) (1)~(3)の断面形状に y 方向に同一の力が作用した時を考える．このとき曲がりにくい順に並び替えよ．なお曲げ剛性はヤング率 E を用いて EI で表され，各形状において E の値は等しいとする．

[1]

(1)

断面二次モーメントには様々な解法があるが例として，求める図形を以下の図のように部材 A，部材 B に分け，それぞれの断面二次モーメントを足し合わせることで求まる．

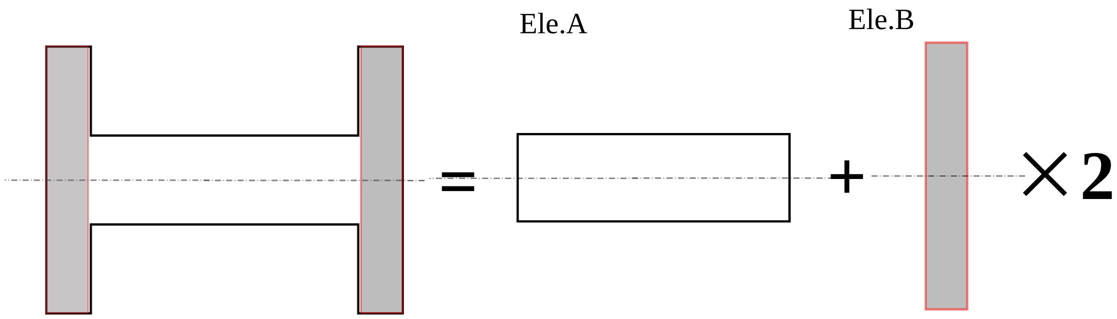

Fig.1.4 部材の分解図

それぞれの部材における断面二次モーメント I_z を求める．

i) 部材 A のとき

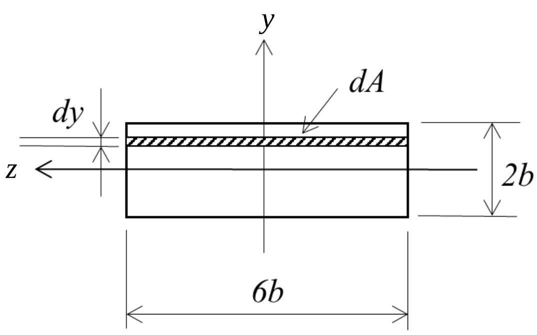

Fig.1.5 部材 A

図 1.5 の斜線部に示す微小面積 dA を求めると

$$dA = 6bdy \tag{1.1}$$

したがって，z 軸に関する断面二次モーメントは次式で求められる．

$$I_{zA} = \int_{-b}^{b} y^2 dA = 2\int_{0}^{b} y^2 dA = 2\int_{0}^{b} y^2 6bdy = 4b^4 \tag{1.2}$$

なお幅を b，長さを h と置くことで基本図形である四角形の断面二次モーメントは次式で表される．ここに $b=6b$，$h=2b$ を代入することでも同じ値になることが確認される．

$$I_{\mathrm{zA}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6b\left(2b\right)^3}{12} = 4b^4 \tag{1.3}$$

以降は簡略化のために，式(1.3)に示した四角形の断面二次モーメントの公式を用いることとする．

ii) 部材 B のとき

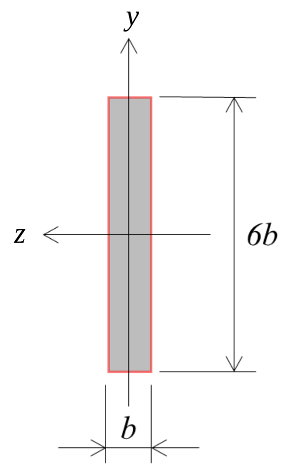

Fig.1.6 部材 B

式(1.3)を用いて，部材 B における z 軸に関する断面二次モーメントは次のように求まる．

$$I_{\mathrm{zB}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{b\left(6b\right)^3}{12} = 18b^4 \tag{1.4}$$

図 1.4 を参考に式(1.3)および式(1.4)を用いることで，全体の z 軸に関する断面 2 次モーメントは次式で求められる．

$$I_{\mathrm{z}} = I_{\mathrm{zA}} + 2I_{\mathrm{zB}} = 4b^4 + 36b^4 = 40b^4 \tag{1.5}$$

(別解)

上の解法のように全体をいくつかの部材に分けずとも，以下のように積分範囲を分けて考えることもできる．各積分範囲における微小面積 dA を以下の図に示す.

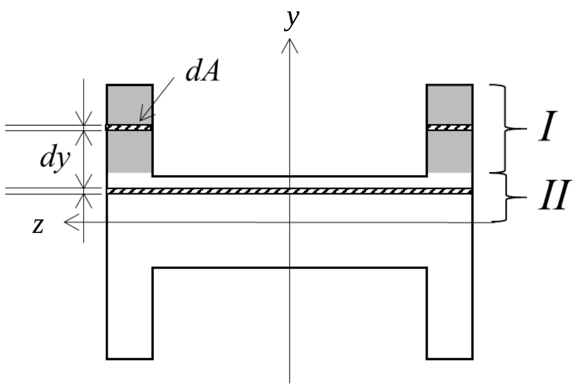

Fig.1.7 積分範囲の分割

図 1.7 の斜線部に示す各領域での微小面積 dA を求めると

$$dA_{\mathrm{I}} = 2bdy, \quad dA_{\mathrm{II}} = 8bdy \tag{1.6}$$

z 軸に対する対称性および各積分範囲を考慮し，全体の z 軸に関する断面二次モーメントを求めると，次のように各積分範囲の和として求まる.

$$\begin{aligned} I_z &= 2\left(\int_{\mathrm{I}} y^2 dA + \int_{\mathrm{II}} y^2 dA\right) \\ &= 2\left(\int_b^{3b} y^2\, 2bdy + \int_0^b y^2\, 8bdy\right) \\ &= 2\left(2b\left[\frac{y^3}{3}\right]_b^{3b} + 8b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^b\right) = 40b^4 \end{aligned} \tag{1.7}$$

(2)

全体の断面二次モーメントは，以下の図に示すように部材 C と部材 D に分け，部材 C の断面二次モーメントより部材 D の断面二次モーメントを引くことで求まる．

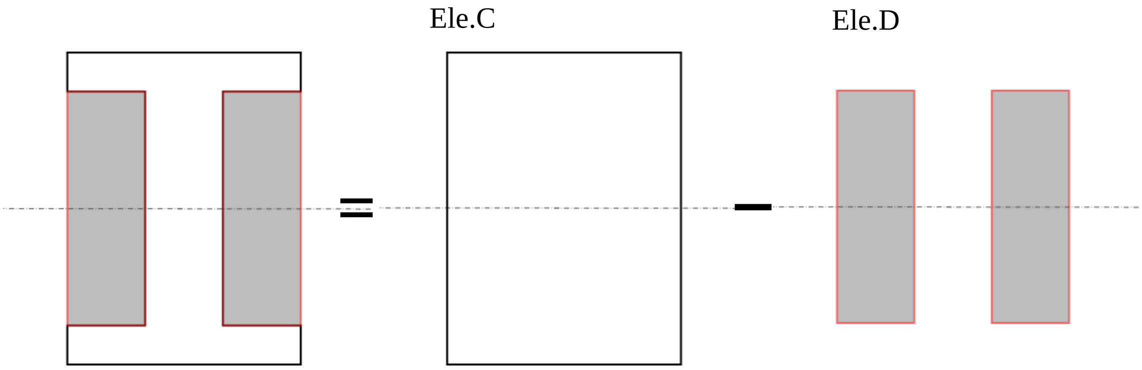

Fig.1.8 部材の分解図

それぞれの部材における断面二次モーメント I_z を求める．

i) 部材 C のとき

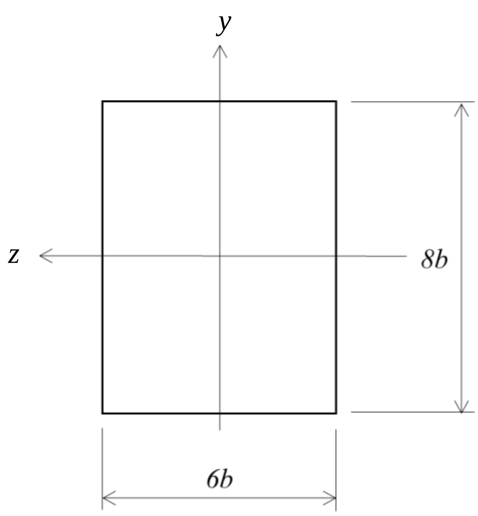

Fig.1.9 部材 C

式(1.3)を用いて，部材 C における z 軸に関する断面二次モーメントは次のように求まる．

$$I_{z\mathrm{C}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6b(8b)^3}{12} = 256b^4 \tag{1.8}$$

ii) 部材 D のとき

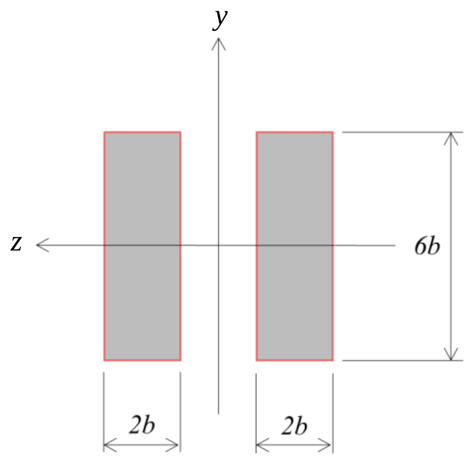

Fig.1.10 部材 D

式(1.3)を用いて，部材 D における z 軸に関する断面二次モーメントは次のように求まる.

$$I_{z\mathrm{D}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{4b\left(6b\right)^3}{12} = 72b^4 \tag{1.9}$$

図 1.8 を参考に式(1.8)および式(1.9)を用いることで，全体の z 軸に関する断面二次モーメントは次式で求められる.

$$I_z = I_{z\mathrm{C}} - I_{z\mathrm{D}} = 256b^4 - 72b^4 = 184b^4 \tag{1.10}$$

式(1.5)および式(1.10)より，断面形状が同一であっても，軸の方向を変えることによって断面二次モーメント I_z が変化することが確認できる.

(3)

全体の断面二次モーメントは，以下の図に示すように部材 E と部材 F に分け，部材 E の断面二次モーメントに部材 F の断面二次モーメントを足すことで求まる．

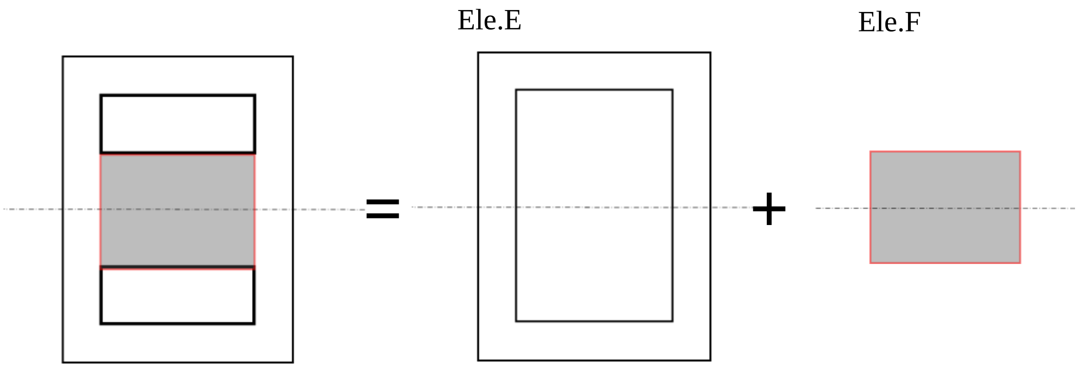

Fig.1.11 部材の分解図

それぞれの部材における断面二次モーメント I_z を求める．

i) 部材 E のとき

z 軸に関する断面二次モーメントは z 座標に依らないため，以下の図に示すように，形状(2)の断面二次モーメントと一致することに気づかれる．よって $I_{zE} = 184b^4$ となる．

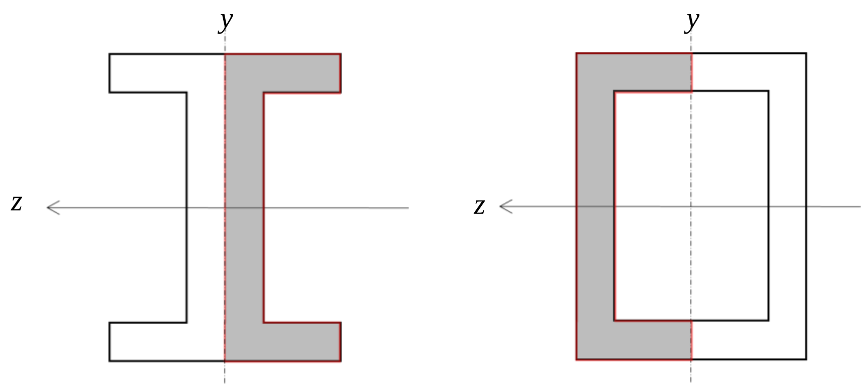

Fig.1.12 部材 E

ii) 部材 F のとき

式(1.3)に b=4b，h=3b を代入することで，$I_{zF} = bh^3/12 = 4b(3b)^3/12 = 9b^4$ となる．

図 1.11 を参考に，全体の z 軸に関する断面二次モーメントは次式で求められる．

$$I_z = I_{zE} + I_{zF} = 184b^4 + 9b^4 = 193b^4 \tag{1.11}$$

(4) (1)~(3)の断面形状に y 方向に同一の力が作用した時を考える．このとき一番曲がりにく順に並び替えよ

　断面二次モーメントは曲がりにくさの指標であり，断面二次モーメントが大きいほど曲げ剛性も増加する．そのため(1)~(3)の断面形状の断面二次モーメントの大小関係を比較すればよい．式(1.5)，(1.10)，(1.11)より，各断面形状における断面二次モーメントの大小関係は以下のようになる．

$$193b^4 > 184b^4 > 40b^4$$

よって，(1)~(4)の断面形状の曲がりにくさの大小関係は次のようになる．

$$(3) > (2) > (1)$$

[2] 図に示すような長さ $2l$ のはりにおいて点 A に長さ l の剛体レバーが付いており，はりと剛体レバーにそれぞれ分布荷重 p が作用している．またはりは図に示されるようにひし形鋼とする．このとき，以下の問いに答えよ．

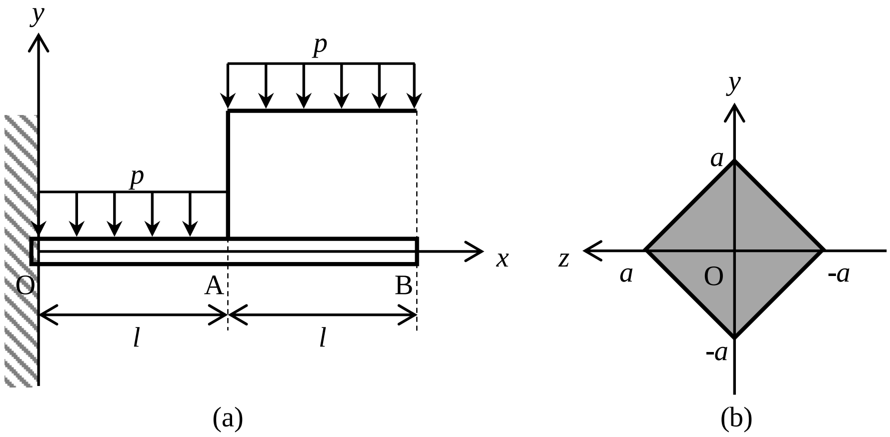

Fig.2

(1) このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

(2) 壁からの反力 R_o 及び反モーメント M_o を求めよ．但し，反力は y 軸方向を正，反モーメントは反時計回り方向を正とする．

(3) はりに生じるせん断力分布 $Q(x)$，曲げモーメント分布 $M(x)$を求めよ．但し，せん断力は y 軸方向を正，曲げモーメントは時計回り方向を正とする．

(4) SFD と BMD を描け．

(5) はりに生じる最大曲げ応力 σ_{max} の大きさを求めよ．また最大曲げ応力の算出には以下の計算式を用いよ．

$$\sigma_{max} = \left| \frac{M_{max}}{I_z} y \right|$$

[2]

(1) このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ.

はりの断面は z 軸に関して対称であるから，図 2.1 のように z 軸上部のみで考える.

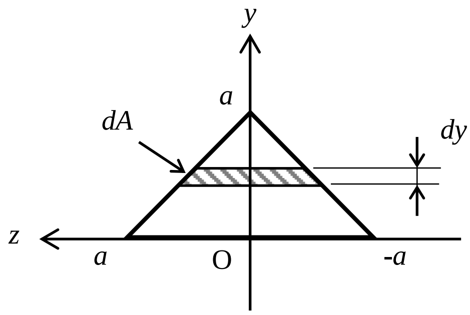

Fig. 2.1

図 2.1 の斜線部に示す微小台形の面積 dA を求めると

$$dA = \frac{2a}{a}(a-y)dy = 2(a-y)dy \tag{2.1}$$

従って，三角形の z 軸に関する断面 2 次モーメントを I_z は次のように求まる.

$$\begin{aligned} I_z &= 2\int_A y^2 dA \\ &= 2\int_0^a y^2 \times 2(a-y)dy \\ &= \frac{a^4}{3} \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2) 壁からの反力 R_0 及び反モーメント M_0 を求めよ.

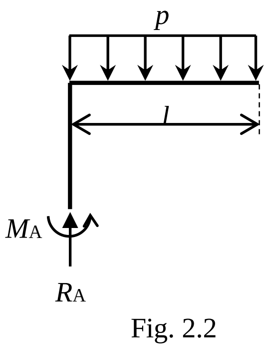

Fig. 2.2

点 A においてはりが剛体レバーに与える荷重 R_A とモーメント M_A を求める． y 軸方向の力のつり合い及び点 A におけるモーメントのつり合いより

$$R_A - pl = 0 \qquad \therefore R_A = pl \tag{2.3}$$

$$M_A - \int_0^l pxdx = 0 \qquad \therefore M_A = \frac{pl^2}{2} \tag{2.4}$$

作用反作用の法則よりはり全体の FBD を図 2.3 に示す.

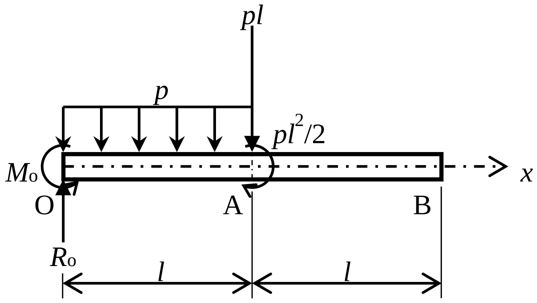

Fig. 2.3

x 軸方向の力のつり合い及び点 O 周りのモーメントのつり合いより

$$R_0 - pl - pl = 0 \qquad \therefore R_0 = 2pl \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} M_0 - \int_0^l pxdx - pl \times l - \frac{pl^2}{2} = 0 \\ M_0 - \frac{pl^2}{2} - pl^2 - \frac{pl^2}{2} = 0 \qquad \therefore M_0 = 2pl^2 \end{gathered} \tag{2.6}$$

(3) はりに生じるせん断力分布 $Q(x)$, 曲げモーメント分布 $M(x)$を求めよ.

それぞれの区間について FBD を考える.

(i) $0 \le x \le l$

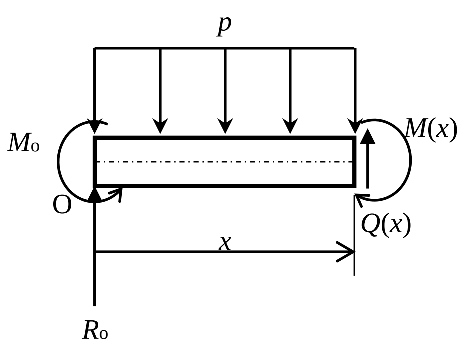

Fig. 2.4

力のつり合いより

$$\begin{aligned} Q(x) &= px - R_0 \\ &= px - 2pl \\ &= p(x-2l) \end{aligned} \tag{2.7}$$

モーメントのつり合いより

$$\begin{aligned} M(x) &= M_0 + \int_0^x pxdx - R_0 x \\ &= 2pl^2 + \frac{px^2}{2} - 2pxl \\ &= \frac{p}{2}\left(x^2 - 4xl + 4l^2\right) \\ &= \frac{p}{2}\left(x-2l\right)^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

(ii) $l \leq x \leq 2l$

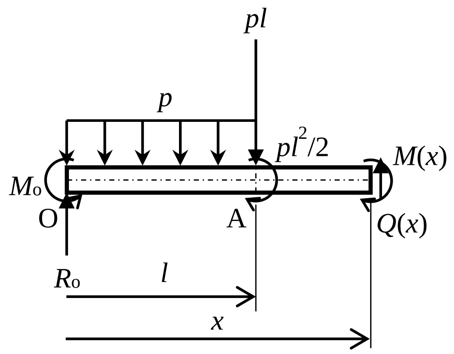

Fig. 2.5

力のつり合いより

$$\begin{aligned} Q(x) &= pl + pl - R_0 \\ &= 2pl - 2pl \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

O 点周りのモーメントのつり合いより

$$\begin{aligned} M(x) &= M_0 - \int_0^l pxdx - \frac{pl^2}{2} - pl^2 \\ &= 2pl^2 - \frac{pl^2}{2} - \frac{pl^2}{2} - pl^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

(4) SFD と BMD を描け.

(3)で求めたせん断力分布 $Q(x)$，曲げモーメント分布 $M(x)$より

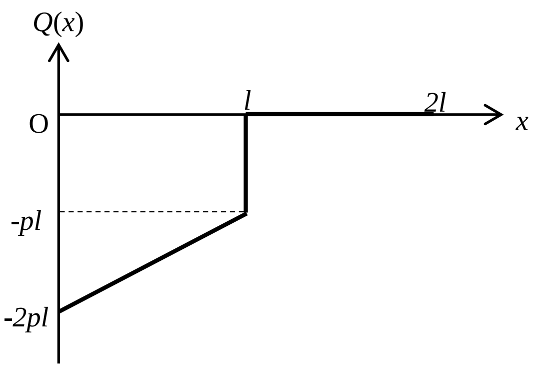

Fig. 2.6 SFD

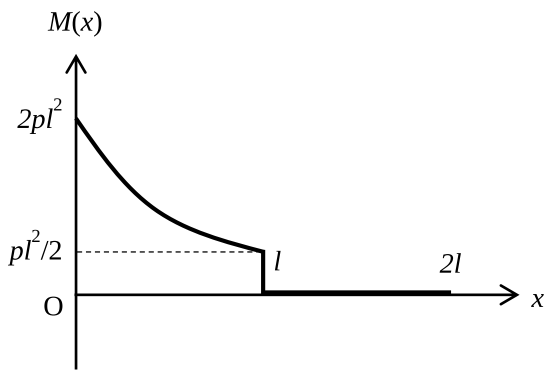

Fig. 2.7 BMD

(5) はりに生じる最大曲げ応力 $\boldsymbol{\sigma_{max}}$ の大きさを求めよ．

まず図 2.7 の BMD より x=0 において最大曲げモーメント $M_{max} = 2pl^2$ が生じる．また，最大曲げ応力 σ_{max} は図心から最も離れた点，すなわち $y = \pm a$ に生じる．従って，σ_{max} は以下のように求まる．

$$\sigma_{max} = \left| \frac{M_{max}}{I_z} y \right| = \left| \frac{2pl^2}{a^4/3} \times (\pm a) \right| = \frac{6pl^2}{a^3} \tag{2.11}$$