

## 材料の力学 1 Step2 第 8 回演習問題(2018/6/19 実施)

[1] 図 1 に示すように外径  $2d$ , 内径  $d$ , 長さ  $L$  の中空円筒 1 と, 外径  $3d$ , 内径  $d$ , 長さ  $L$  の中空円筒 2 が B 点と C 点において剛体円盤で接合され, それぞれの他端は剛体壁により固定されている. また, 剛体円盤にはねじりモーメントが作用している. 中空円筒の横弾性係数がすべて  $G$  であるとき以下の問いに答えなさい. なお, 剛体円盤の厚さは無視できるものとする.

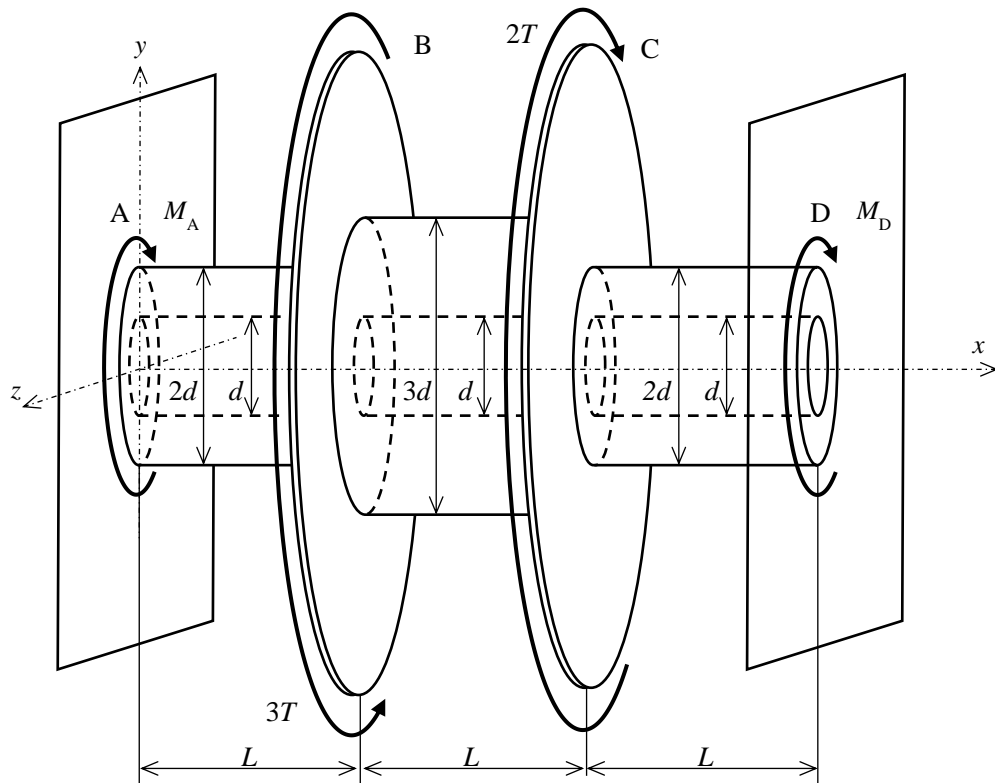


Fig.1 中空円筒

- (1) AB 間, BC 間, CD 間に生じるねじれ角  $\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{BC}$ ,  $\varphi_{CD}$  を点 A において生じる反モーメント  $M_A$  を用いて表せ.
- (2)  $M_A$ ,  $M_D$  を  $T$  を用いて表せ.
- (3) 3 つの中空円筒に生じるせん断応力をそれぞれ求め, AD 間で生じる最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ.

[1]

(1) AB 間, BC 間, CD 間に生じるねじれ角  $\varphi_{AB}, \varphi_{BC}, \varphi_{CD}$  を点 A において生じる反モーメント  $M_A$  を用いて表せ.

中空円筒の FBD は図 1.1 のようになる.

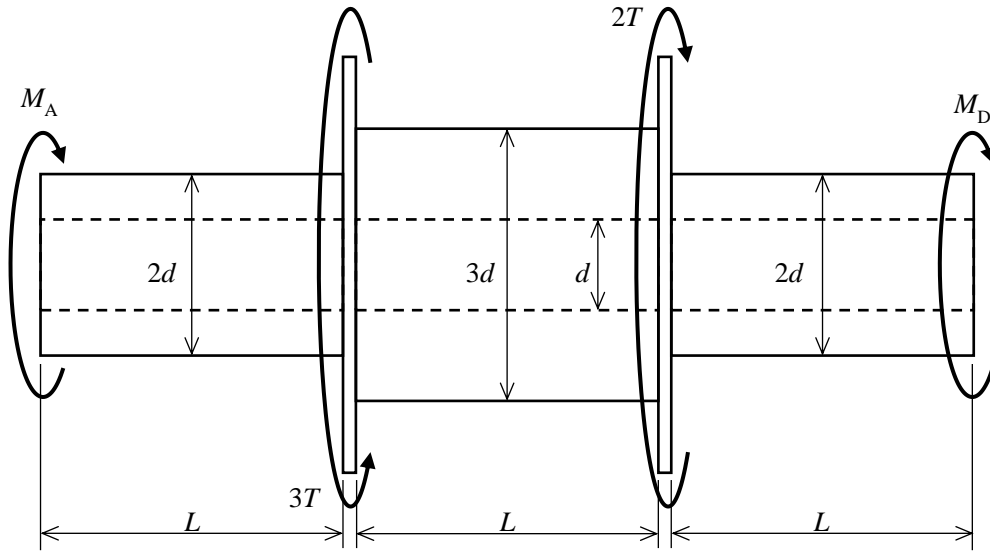


Fig.1.1 FBD

中空円筒の中心を原点にとると, FBD よりモーメントのつりあい式は以下のようなになる.

$$\begin{aligned} -M_A + 3T - 2T - M_D &= 0 \\ -M_A - M_D + T &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

中空円筒 1, 2 の断面二次極モーメントをそれぞれ  $I_1, I_2$  とすると, 以下のように表される.

$$I_1 = \int_A \rho^2 dA = \int_{d/2}^d 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \left\{ d^4 - \left( \frac{1}{2}d \right)^4 \right\} = \frac{15}{32} \pi d^4 \quad (1.2)$$

$$I_2 = \int_A \rho^2 dA = \int_{d/2}^{3d/2} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \left\{ \left( \frac{3}{2}d \right)^4 - \left( \frac{1}{2}d \right)^4 \right\} = \frac{5}{2} \pi d^4 \quad (1.3)$$

原点からの距離 $x$ におけるねじりモーメントは以下のように計算することができる。

(i)  $0 \leq x \leq L$

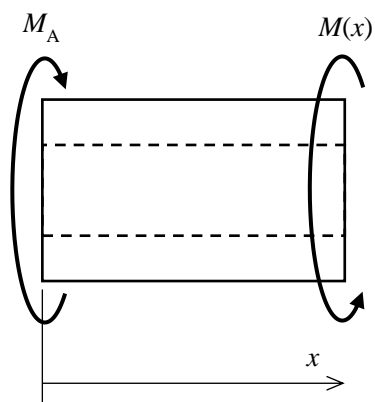


Fig.1.2 FBD

$$\begin{aligned} -M_A + M(x) &= 0 \\ M(x) &= M_A \end{aligned} \tag{1.4}$$

(ii)  $L \leq x \leq 2L$

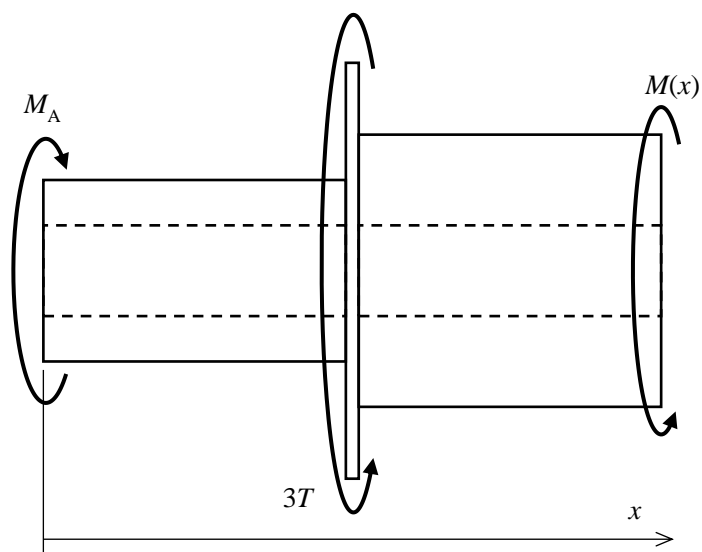


Fig.1.3 FBD

$$\begin{aligned} -M_A + 3T + M(x) &= 0 \\ M(x) &= M_A - 3T \end{aligned} \tag{1.5}$$

(iii)  $2L \leq x \leq 3L$

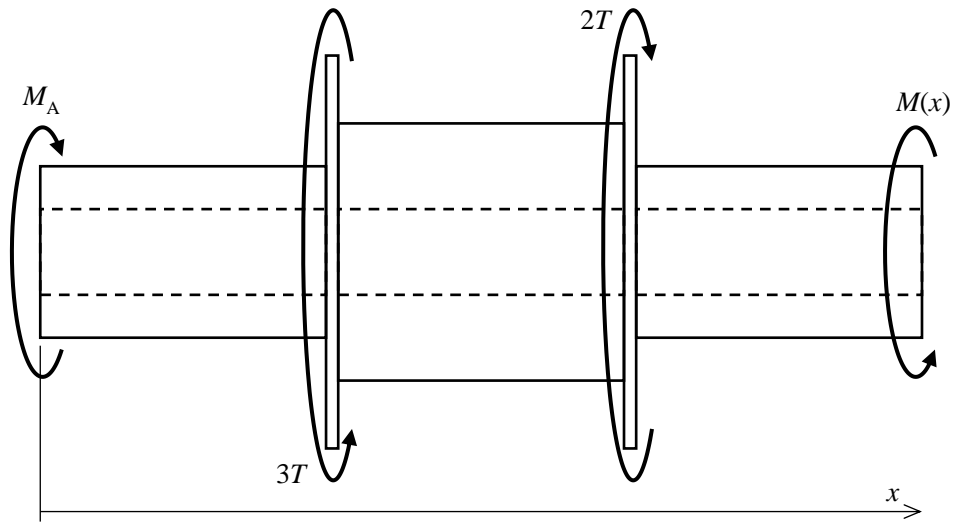


Fig.1.4 FBD

$$\begin{aligned} -M_A + 3T - 2T + M(x) &= 0 \\ M(x) &= M_A - T \end{aligned} \quad (1.6)$$

以上より、ねじれ角は以下のように求まる.

$$\varphi_{AB} = \frac{M(x)L}{GI_1} = \frac{32M_A L}{15\pi Gd^4} \quad (1.7)$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M(x)L}{GI_2} = \frac{2(M_A - 3T)L}{5\pi Gd^4} \quad (1.8)$$

$$\varphi_{CD} = \frac{M(x)L}{GI_2} = \frac{32(M_A - T)L}{15\pi Gd^4} \quad (1.9)$$

(2)  $M_A$ ,  $M_D$  を  $T$  を用いて表せ.

両端が壁により固定されているため、部材全体でのねじれ角は 0 となる. これよりねじれ角について以下の条件が成り立つ.

$$\varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = 0 \quad (1.10)$$

したがって、式(1.7)から式(1.9)より

$$\begin{aligned} &\varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} \\ &= \frac{32M_A L}{15\pi Gd^4} + \frac{2(M_A - 3T)L}{5\pi Gd^4} + \frac{32(M_A - T)L}{15\pi Gd^4} \\ &= \frac{(70M_A - 50T)L}{15\pi Gd^4} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$70M_A - 50T = 0$$

$$M_A = \frac{5}{7}T \quad (1.12)$$

また，式(1.1)より  $M_D$  について整理すると

$$M_D = \frac{2}{7}T \quad (1.13)$$

となる。

(3) 3つの中空円筒に生じるせん断応力をそれぞれ求め，AD 間で生じる最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ。

最大せん断応力  $\tau_{\max}$  は部材における最大せん断ひずみを  $\gamma_{\max}$  とすれば次式で表される。

$$\tau_{\max} = G\gamma_{\max} \quad (1.14)$$

またせん断ひずみ  $\gamma$  はねじれ角  $\varphi$ ，部材の長さ  $L$ ，中心からの距離  $r$  を用いて以下の式で表される。

$$\gamma = \frac{\varphi r}{L} \quad (1.15)$$

最大せん断応力は部材表面において生じると考えられる。AB 間の最大せん断応力は，式(1.14) に式(1.7)，(1.12)，(1.15)を代入すると以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \tau_{\max_{AB}} &= Gr \frac{\varphi_{AB}}{L} \\ &= Gr \frac{32M_A}{15\pi Gd^4} \\ &= Gd \frac{32}{15\pi Gd^4} \frac{5}{7}T \\ &= \frac{32T}{21\pi d^3} \end{aligned} \quad (1.16)$$

同様に，BC 間および CD 間の最大せん断応力は以下のようにそれぞれ求められる。

$$\begin{aligned} \tau_{\max_{BC}} &= Gr \frac{\varphi_{BC}}{L} \\ &= Gr \frac{2(M_A - 3T)}{5\pi Gd^4} \\ &= G \frac{3d}{2} \frac{-\frac{32}{7}T}{5\pi Gd^4} \\ &= -\frac{48T}{35\pi d^3} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\max\_CD} &= Gr \frac{\varphi_{CD}}{L} \\
&= Gr \frac{32(M_A - T)}{15\pi Gd^4} \\
&= Gd \frac{-\frac{64}{7}T}{15\pi Gd^4} \\
&= -\frac{64T}{105\pi d^3}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

以上より，AB間，BC間，CD間それぞれの最大せん断応力の大きさを絶対値で評価することでAD間の最大せん断応力はAB間で生じることがわかる．

$$\tau_{\max} = \frac{32T}{21\pi d^3} \tag{1.19}$$

[2] 図2に示すように、右端に直径  $6r$  の剛体円盤が取り付けられた丸棒部材が点  $O$  で壁に固定されている。部材には  $0 \leq x \leq L$  の範囲で分布モーメント  $q$  が作用しており、剛体円盤には外力  $P$  が対称に作用している。また、 $x=L$  の  $A$  点に  $x$  軸から反時計回りに  $\theta = 45^\circ$  傾いた方向にひずみゲージを貼り付け、ひずみは  $\varepsilon_x = 100\mu$  となった。この時、以下の問いに答えよ。なお、部材の横弾性係数は  $G$  とし、剛体円板は十分に薄いとする。

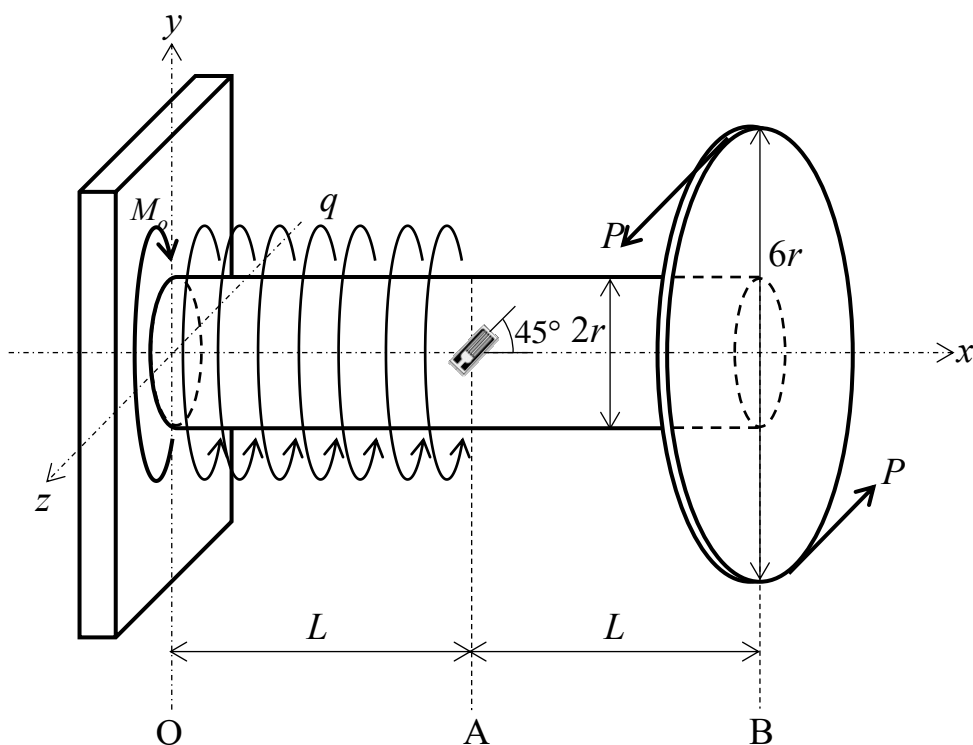


Fig.2 剛体円板が取り付けられた丸棒部材.

- (1) 丸棒の断面二次極モーメント  $I_p$  を求めよ.
- (2) ねじりモーメント  $M(x)$  の  $x$  軸方向分布を図示せよ.
- (3) 最大せん断応力  $\tau(x)$  の  $x$  軸方向分布(SFD)を図示せよ.
- (4)  $P=36[\text{N}]$ ,  $r=3[\text{mm}]$  とし横弾性係数  $G$  を求めよ.  
ただし、有効数字は3桁で単位を明記すること.

[2]

(1) 丸棒の断面二次極モーメント  $I_p$  を求めよ.

図 2 の丸棒部材の断面二次極モーメント  $I_p$  は式(2.1)のように算出される. またここでの  $\rho$  は, 部材の曲率半径を示す.

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \left[ \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^r = \frac{\pi r^4}{2} \quad (2.1)$$

(2) ねじりモーメント  $M$  の  $x$  軸方向分布を図示せよ.

モーメントのつり合い式から反モーメント  $M_o$  を求める. FBD を描くと図 2.1 のようになる.

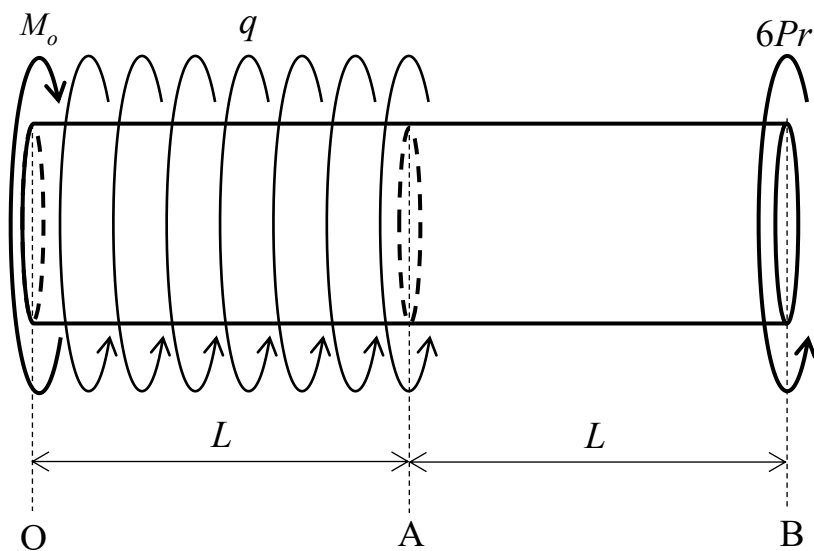


Fig.2.1 FBD

モーメントのつり合い式より, 反モーメントは式(2.2)のように算出される.

$$\begin{aligned} -M_o + qL + 6Pr &= 0 \\ \therefore M_o &= qL + 6Pr \end{aligned} \quad (2.2)$$

これより, 原点からの距離  $x$  の仮想断面におけるねじりモーメントは以下のように算出できる.



(i)  $0 \leq x \leq L$

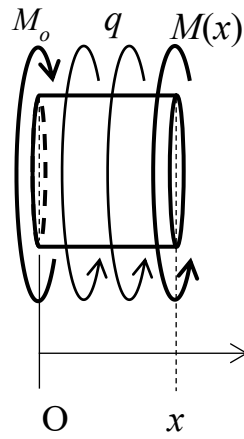


Fig.2.2 OA 間の FBD

モーメントのつり合い式より,

$$\begin{aligned} -M_o + qx + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= M_o - qx \end{aligned} \tag{2.3}$$

(ii)  $L \leq x \leq 2L$

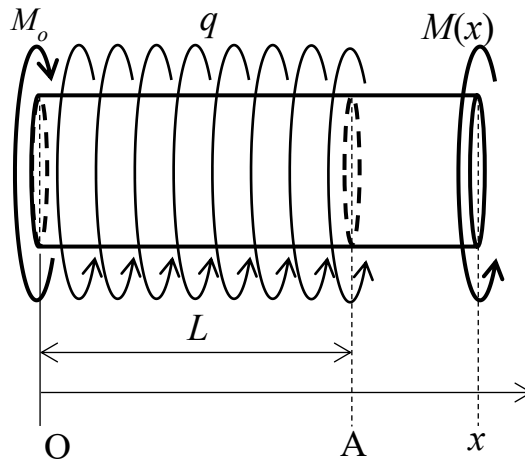


Fig.2.3 OB 間の FBD

モーメントのつり合い式より

$$\begin{aligned} -M_o + qL + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= M_o - qL \end{aligned} \tag{2.4}$$

(i), (ii)より, ねじりモーメント  $M(x)$  の  $x$  軸方向分布は図 2.4 のようになる.

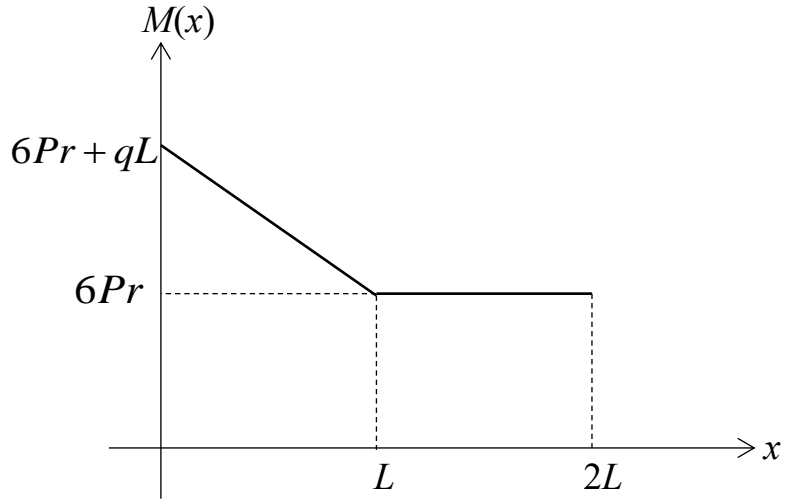


Fig.2.4 ねじりモーメント  $M(x)$  の  $x$  軸方向分布

(3) 最大せん断応力  $\tau(x)$  の  $x$  軸方向分布(SFD)を図示せよ.

せん断応力  $\tau(x)$  は(1), (2)でそれぞれ求めた断面二次極モーメント  $I_p$ , ねじりモーメント  $M(x)$  を用いて式(2.5)のように算出できる.

$$\tau(x) = \frac{M(x)}{I_p} \rho \quad (2.5)$$

したがって, 各範囲におけるせん断応力  $\tau(x)$  は以下のように算出される.

(i)  $0 \leq x \leq L$

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{M(x)}{I_p} \rho = \frac{6Pr + q(L-x)}{\frac{\pi}{2}r^4} \cdot r \\ &= \frac{12Pr + 2q(L-x)}{\pi r^3} \\ &= \frac{2}{\pi r^3} \{6Pr + q(L-x)\}\end{aligned}\tag{2.6}$$

(ii)  $L \leq x \leq 2L$

$$\tau(x) = \frac{M(x)}{I_p} \rho = \frac{6Pr}{\frac{\pi}{2}r^4} \cdot r = \frac{12P}{\pi r^2}\tag{2.7}$$

(i), (ii)より, SFD は図 2.5 のようになる.

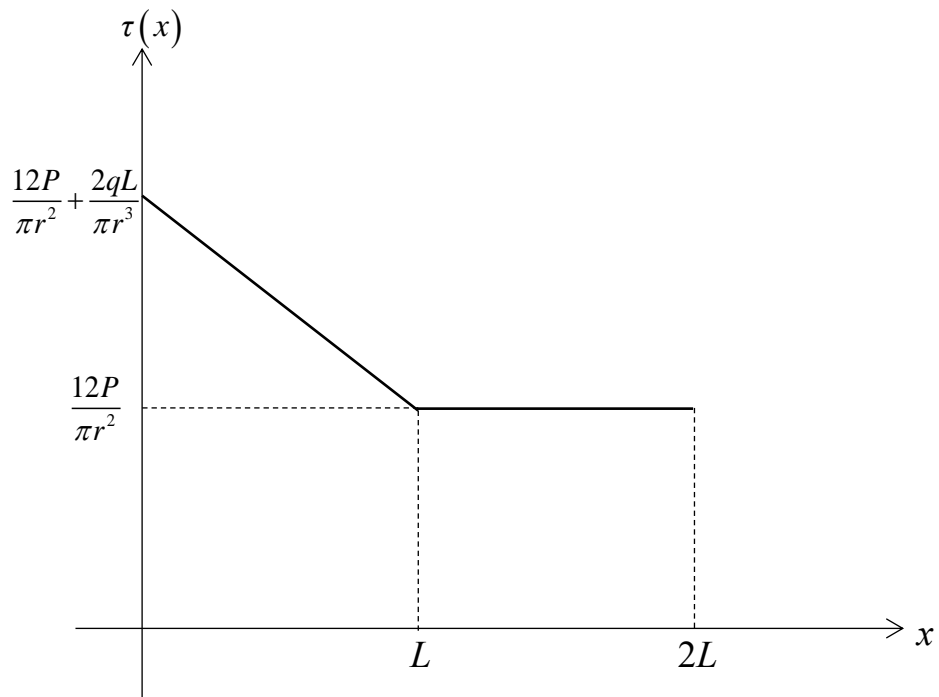


Fig.2.5 SFD

(4)  $P=36[\text{N}]$ ,  $r=3[\text{mm}]$ とし横弾性係数  $G$  を求めよ。ただし、有効数字は3桁で単位を明記すること。

図2より、 $x$ 軸方向、 $y$ 軸方向に荷重はかかっていないため、 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ となる。これより、ひずみの座標変換の式より、式(2.8)が成立する。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ &= \gamma_{xy} \cos 45^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{2.8}$$

また、せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  は横弾性係数  $G$ 、せん断応力  $\tau(x)$  を用いると、式(2.9)のように表される。

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau(x)}{G}\tag{2.9}$$

また、ひずみゲージはA点上にあるため、A点におけるせん断応力は図2.5より式(2.10)のようになる。

$$\tau(L) = \frac{12P}{\pi r^2}\tag{2.10}$$

したがって、式(2.9)、(2.10)を式(2.8)に代入すると、横弾性係数  $G$  は式(2.11)のように算出される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \frac{\tau(L)}{2G} \\ \Leftrightarrow G &= \frac{\tau(L)}{2\varepsilon_{x'}} = \frac{12P}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_{x'}} \\ &= \frac{12 \times 36}{2\pi \times (3 \times 10^{-3})^2 \times 100 \times 10^{-6}} \\ &\simeq 76.4[\text{GPa}]\end{aligned}\tag{2.11}$$

(別解)

図 2 の応力状態は純せん断であるため，モールの応力円は図 2.6 のようになる．

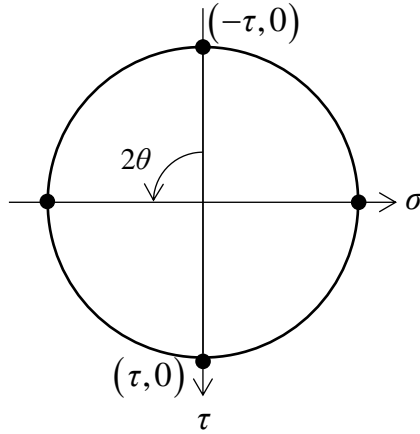


Fig.2.6 A 点におけるモールの応力円

図 2.6 より，反時計回りに  $2\theta = 90^\circ$  回転させることにより，A 点における  $\sigma_{x'}$ ， $\sigma_{y'}$  が得られるので，したがって A 点における  $\sigma_{x'}$ ， $\sigma_{y'}$  は式(2.12)のように得られる．

$$\sigma_{x'} = \tau, \sigma_{y'} = -\tau \quad (2.12)$$

これより， $\varepsilon_{\theta}$  はフックの法則より，式(2.13)のように表される．

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E}(\sigma_{x'} - \nu\sigma_{y'}) = \frac{1}{E}(\tau + \nu\tau) = \frac{\tau}{E}(1 + \nu) \quad (2.13)$$

ここで  $\nu$  はポアソン比である．また，横弾性係数  $G$  は式(2.14)のように表される．

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.14)$$

したがって式(2.13)，(2.14)より，横弾性係数  $G$  は式(2.15)のように算出される．

$$G = \frac{1}{2} \cdot \frac{E}{(1 + \nu)} = \frac{\tau}{2\varepsilon_{x'}} \quad (2.15)$$

これより，式(2.15)は式(2.11)と一致した．