

材料の力学 1 Step2 第7回演習問題 (6/12 実施)

[1] 図1に示すように(a)には両端を壁に固定された丸棒部材が, (b)には左端を壁に固定された段付き丸棒部材がある. (a)では AB 間に一様分布のねじりモーメント t が, (b)では点 B' にねじりモーメント $2T$, 点 D' にねじりモーメント $3T$ が作用している. それぞれの部材の横弾性係数は G とする.

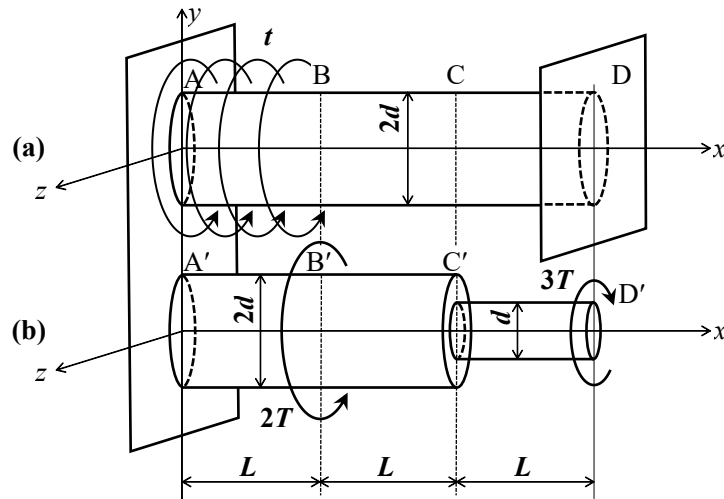


Fig.1 壁に固定された丸棒部材および段付き丸棒部材

図 1(a)について以下の問いに答えよ.

- (1) 断面二次極モーメント I_{pAD} を求めよ.
- (2) 点 A, 点 D における壁からの反モーメントをそれぞれ M_A , M_D として, モーメントのつり合い式を示せ.
- (3) M_A を用いて AB 間に生じるねじれ角 φ_{AB} , BD 間に生じるねじれ角 φ_{BD} を求めよ.
- (4) 右端の壁による拘束条件 ($\varphi_{AD}=0$) および (2) で求めたモーメントのつり合い式を用いて, 点 A, 点 D における壁からの反モーメント M_A , M_D を求めよ.

図 1(b)について以下の問いに答えよ.

- (5) FBD を描き, 点 A' における壁からの反モーメント $M_{A'}$ を求めよ.
- (6) ねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示せよ.
- (7) A'D' 間のねじれ角 $\varphi_{A'D'}$ を求めよ.

※ ねじれ角:
$$\varphi = \int \frac{M(x)}{GI_p} dx$$

[1]

(1) 断面二次極モーメント I_{pAD} を求めよ.

図 1(a)の断面二次極モーメント I_{pAD} は以下のように求まる.

$$I_{pAD} = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^d r^3 dr = \frac{1}{2} \pi d^4 \quad (1.1)$$

(2) 点 A, 点 D における壁からの反モーメントをそれぞれ M_A , M_D として, モーメントのつり合い式を示せ.

点 A, 点 D における壁からの反モーメント M_A , M_D を用いて FBD を描くと次のようになる.

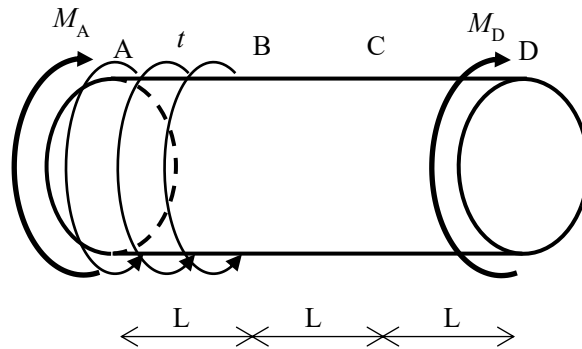


Fig. 1.1 図 1(a)の部材の FBD

図 1.1 において, モーメントのつり合い式は次のように表せる.

$$-M_A + tL - M_D = 0 \quad (1.2)$$

(3) M_A を用いて AB 間に生じるねじれ角 ϕ_{AB} , BD 間に生じるねじれ角 ϕ_{BD} を求めよ.

原点からの距離 x におけるねじりモーメント $M(x)$ を求め, ねじり角を導く.

(i) $0 \leq x \leq L$ のとき

AB 間の FBD は図 1.2 のようになる.

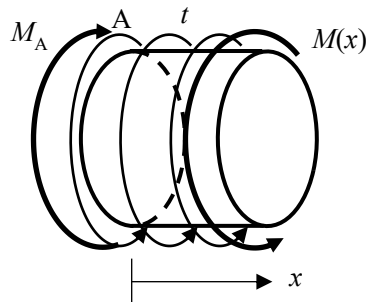


Fig. 1.2 AB 間の FBD

モーメントのつり合い式より，ねじりモーメント $M(x)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} -M_A + tx + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= M_A - tx \end{aligned} \quad (1.3)$$

式(1.1)，(1.3)より，AB 間のひずみ φ_{AB} は以下のように求まる．

$$\varphi_{AB} = \int_0^L \frac{M(x)}{GI_{pAD}} dx = \frac{2(M_A L - \frac{1}{2} t L^2)}{\pi G d^4} \quad (1.4)$$

(ii) $L \leq x \leq 3L$ のとき

AD 間の FBD は図 1.2 のようになる．

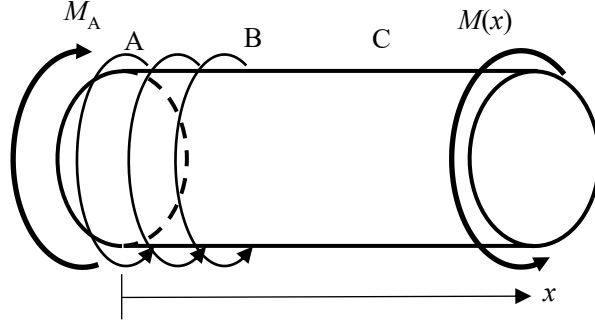


Fig. 1.3 AD 間の FBD

モーメントのつり合い式より，ねじりモーメント $M(x)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} -M_A + tL + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= M_A - tL \end{aligned} \quad (1.5)$$

式(1.1)，(1.5)より，BD 間のひずみ φ_{BD} は以下のように求まる．

$$\varphi_{BD} = \int_L^{3L} \frac{M(x)}{GI_{pAD}} dx = \frac{4(M_A L - tL^2)}{\pi G d^4} \quad (1.6)$$

(4) 右端の壁による拘束条件 ($\varphi_{AD}=0$) および (2) で求めたモーメントのつり合い式を用いて，点 A，点 D における壁からの反モーメント M_A ， M_D を求めよ．

φ_{AD} は式(1.4)，(1.6)を用いて以下のように表される．

$$\varphi_{AD} = \varphi_{AB} + \varphi_{BD} = \frac{6M_A L - 5tL^2}{\pi G d^4} \quad (1.7)$$

このとき, 両端の壁による拘束条件から全体のねじれ角 $\varphi_{AD}=0$ であることから反モーメント M_A は以下のように表される.

$$\begin{aligned}\frac{6M_A L - 5tL^2}{\pi G d^4} &= 0 \\ \therefore M_A &= \frac{5}{6}tL\end{aligned}\quad (1.8)$$

式(1.2), (1.8)より, 反モーメント M_D は以下のように表される.

$$\begin{aligned}-\frac{5}{6}tL + tL - M_D &= 0 \\ \therefore M_D &= \frac{1}{6}tL\end{aligned}\quad (1.9)$$

(5) FBD を描き, 点 A'における壁からの反モーメント M_A を求めよ.

点 A'における壁からの反モーメント M_A を用いて FBD を描くと次のようになる.

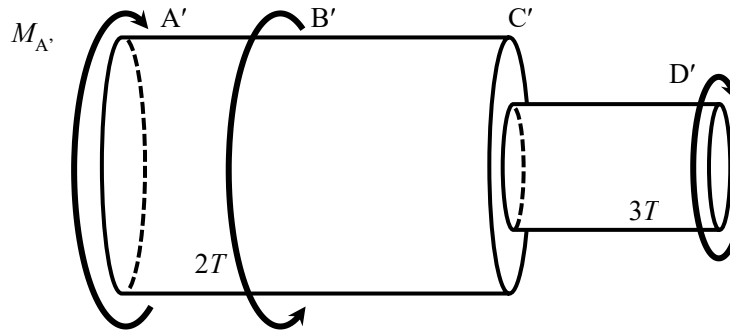


Fig. 1.4 図 1(b)の部材の FBD

図 1.4 において, モーメントのつり合い式は次のように表される.

$$\begin{aligned}-M_A + 2T - 3T &= 0 \\ \therefore M_A &= -T\end{aligned}\quad (1.10)$$

(6) ねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示せよ.

原点からの距離 x におけるねじりモーメント $M(x)$ を求める.

ここで, B'D'間は点 C'部で半径が変化するが, ねじりモーメントは変化しないため, ねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化による場合分けは $0 \leq x \leq L$, $L \leq x \leq 3L$ である.

(i) $0 \leq x \leq L$ のとき

FBD は図 1.5 のようになる.

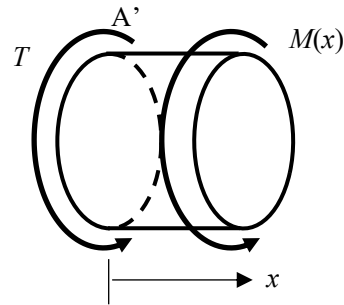


Fig. 1.5 A'B'間における FBD

図 1.5 において, モーメントのつり合い式は次のように表される.

$$\begin{aligned} T + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= -T \end{aligned} \quad (1.11)$$

(i) $L \leq x \leq 3L$ のとき

FBD は図 1.6 のようになる.

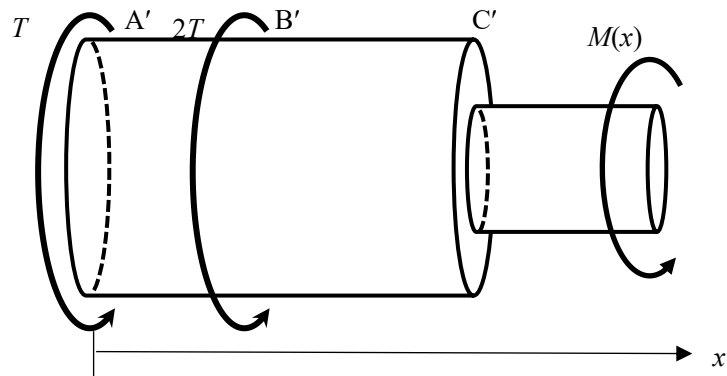


Fig. 1.6 A'D'間の FBD

図 1.5 において, モーメントのつり合い式は次のように表される.

$$\begin{aligned} T + 2T + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= -3T \end{aligned} \quad (1.12)$$

式(1.10), (1.11)より, ねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示すると, 下図のようになる.

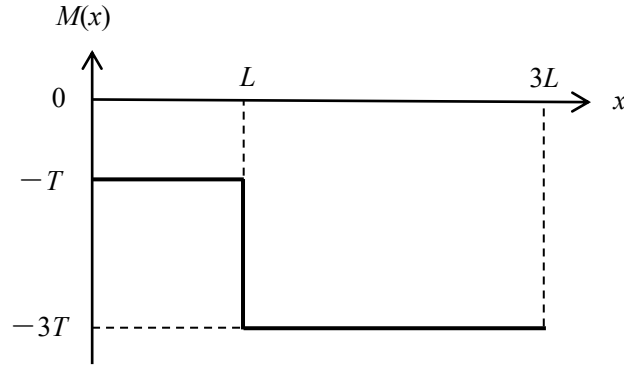


Fig. 1.7 $M(x)$ の x 方向変化

(7) A'D'間のねじれ角 $\varphi_{A'D'}$ を求めよ.

A'C'間, C'D'間の断面二次極モーメント $I_{pA'C'}$, $I_{pC'D'}$ とおくと, それぞれ

$$I_{pA'C'} = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^d r^3 dr = \frac{1}{2} \pi d^4 \quad (1.13)$$

$$I_{pC'D'} = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{1}{32} \pi d^4 \quad (1.14)$$

よって, A'B'間, B'C'間, C'D'間のねじれ角 $\varphi_{A'B'}$, $\varphi_{B'C'}$, $\varphi_{C'D'}$ は, 式(1.11)–(1.14)を用いて,

$$\begin{aligned} \varphi_{A'B'} &= \int_0^L \frac{M(x)}{GI_{pA'C'}} dx = \frac{-2TL}{\pi G d^4} \\ \varphi_{B'C'} &= \int_L^{2L} \frac{M(x)}{GI_{pA'C'}} dx = \frac{-6TL}{\pi G d^4} \\ \varphi_{C'D'} &= \int_{2L}^{3L} \frac{M(x)}{GI_{pC'D'}} dx = \frac{-96TL}{\pi G d^4} \end{aligned} \quad (1.15)$$

したがって, A'D'間のねじれ角 $\varphi_{A'D'}$ は次のようになる.

$$\varphi_{A'D'} = \varphi_{A'B'} + \varphi_{B'C'} + \varphi_{C'D'} = \frac{-104TL}{\pi G d^4} \quad (1.16)$$

- [2] 下図に示すように、なだらかな径の変化のあるテーパ付き丸棒の両端に逆向きのねじりモーメント M をかけたとき以下の間に答えよ。ただし、また横弾性係数は G を用いよ。

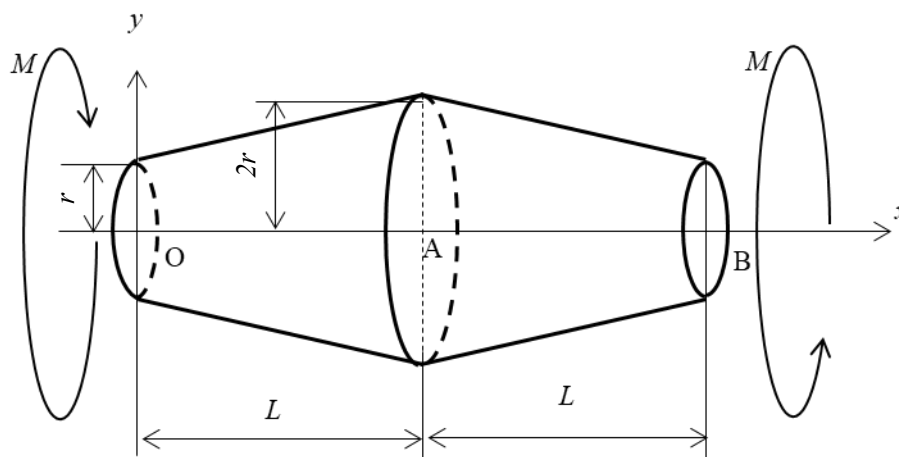


Fig. 2 ねじりモーメントが作用するテーパ付き丸棒

対称性を考慮し $0 \leq x \leq L$ において考える。

- (1) $0 \leq x \leq L$ において、位置 x における半径 $r(x)$ を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq L$ において、位置 x における断面二次極モーメント $I_p(x)$ を求めよ。
- (3) $x = L$ におけるねじれ角 φ を求めよ。
- (4) $x = L$ における最大せん断応力 $\tau_{\max}(L)$ を求めよ。

[2]

(1) 位置 x における半径 $r(x)$ を求めよ.

位置 x における半径 $r(x)$ は, $r(0)=r$, $r(L)=2r$ であることから,

$$r(x) = r \left(1 + \frac{x}{L} \right) \quad (2.1)$$

(2) 位置 x における断面二次極モーメント $I_p(x)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A \rho^2 dA \\ &= \int_0^{r(x)} 2\pi\rho^3 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} r(x)^4 \\ &= \frac{\pi}{2} r^4 \left(1 + \frac{x}{L} \right)^4 \end{aligned} \quad (2.2)$$

(3) $x=L$ におけるねじれ角 φ を求めよ.

$0 \leq x \leq L$ において, FBD を描きモーメントのつりあい式を立てて, ねじりモーメント $M(x)$ を求める.

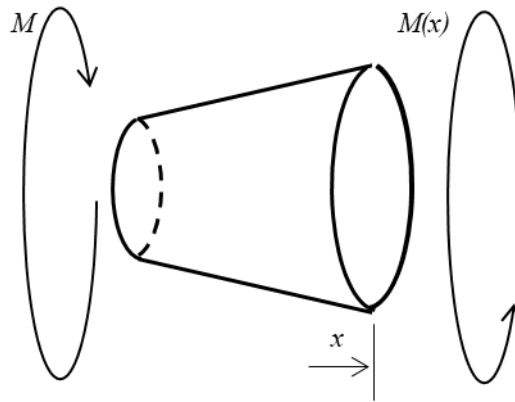


Fig. 2.1 FBD

ねじりモーメント $M(x)$ は

$$\begin{aligned} -M + M(x) &= 0 \\ M(x) &= M \end{aligned} \quad (2.3)$$

と表せる. ねじれ角 φ は以下のように求まる.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \int \theta(x) dx = \int_0^L \frac{M(x)}{GI_P} dx = \frac{2M}{G\pi r^4} \times \int_0^L \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^4} dx \\
&= \frac{2M}{\pi r^4 G} \times \left[-\frac{1}{3} L \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-3} \right]_0^L \\
&= \frac{2M}{\pi r^4 G} \times \left(-\frac{1}{3} L \right) \left(\frac{1}{8} - 1 \right) \\
&= \frac{7ML}{12\pi r^4 G}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

(4) $x=L$ における最大せん断応力 $\tau_{\max}(L)$ を求めよ.

$0 \leq x \leq L$ において考える.

最大せん断応力 $\tau_{\max}(x)$ は, 表面($r=r(x)$)に生じるため, 以下のように求められる.

$$\begin{aligned}
\tau_{\max}(x) &= Gr(x)\theta(x) = \frac{M(x)}{I_P} r(x) \\
&= \frac{2}{\pi} Mr^{-3} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-3}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

よって $x=L$ における最大せん断応力 $\tau_{\max}(L)$ は,

$$\begin{aligned}
\tau_{\max}(L) &= \frac{2}{\pi} Mr^{-3} (1+1)^{-3} \\
&= \frac{M}{4\pi r^3}
\end{aligned} \tag{2.6}$$