材料の力学 1　Step1　第 6 回演習問題(2018/5/29 実施)

[1] 2 次元応力状態にある弾性体のある点 O でせん断応力 τ が図 1 のように作用している．その結果，弾性体の表面に描かれた正方形 OABC が変形して平行四辺形 OAB'C'になった．ただし，点 B，C の x 方向の変位は δ であって，正方形の一辺の長さに比べて十分小さいものとする．nt 座標系は xy 座標系を反時計回りに $\pi/4$ だけ回転した座標系である．弾性体の材料定数を縦弾性係数 E と横弾性係数 G，ポアソン比 ν として，以下の問いに答えよ．解答は解答欄に途中式は機航レポート用紙に記入せよ．

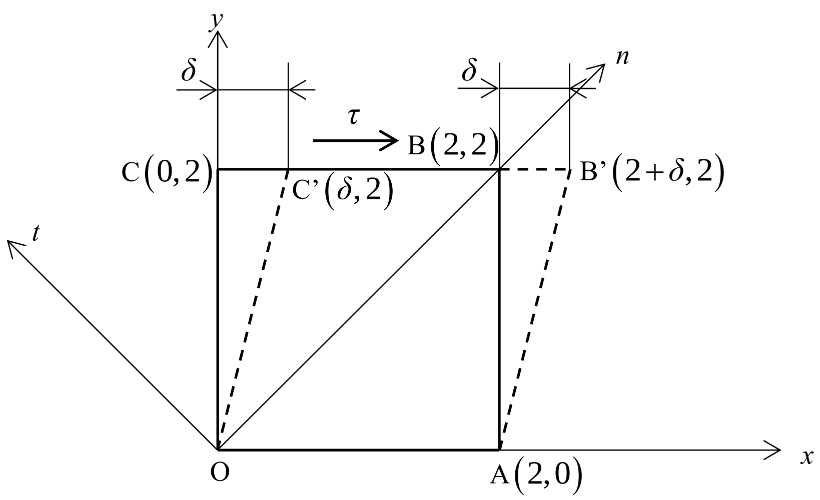


Fig.1 平面応力状態

(1) xy 座標系において，x 方向垂直ひずみ ε_x，y 方向垂直ひずみ ε_y，せん断ひずみ γ_{xy} を δ を含む式でそれぞれ求めよ．

(2) ①このときの応力状態をモールの応力円にて示せ. ②nt 座標系における各応力成分 $\left[\sigma_{nt}\right]$ を τ を含む式で求めよ.

(3) ①点 $\mathrm{B}(2,2)$ が点 $\mathrm{B'}(2+\delta,2)$ になったとして，幾何学的な考察から長さ $\overline{\mathrm{OB'}}$ を δ を含む式で示せ．②また，n 方向垂直ひずみ ε_n を求めよ．

※x が十分小さいとき $\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\dfrac{x}{2}$ と表せることを考慮せよ．

(4) (2)で求めた nt 座標系における応力成分と応力ひずみの関係式から，n 方向の垂直ひずみ ε_n を τ を含む式で求めよ．

(5) (3)と(4)で求めたひずみは一致する．E，G，ν の関係式を求めよ．

[1]

(1) ***xy*** **座標系において，*x* 方向垂直ひずみ**ε_x**，*y* 方向垂直ひずみ**ε_y**，せん断ひずみ**γ_{xy}**を**δ**を含む式でそれぞれ求めよ．**

図 1 ように変形したので，各ひずみ成分は

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = \frac{\delta}{2} \tag{1}$$

(2) ①このときの応力状態をモールの応力円にて示せ．②*nt* 座標系における各応力成分$[\sigma_{nt}]$**を**τ**を含む式で求めよ．**

xy 座標系における応力状態は図 1.1 のようになる．

$$[\sigma_{xy}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

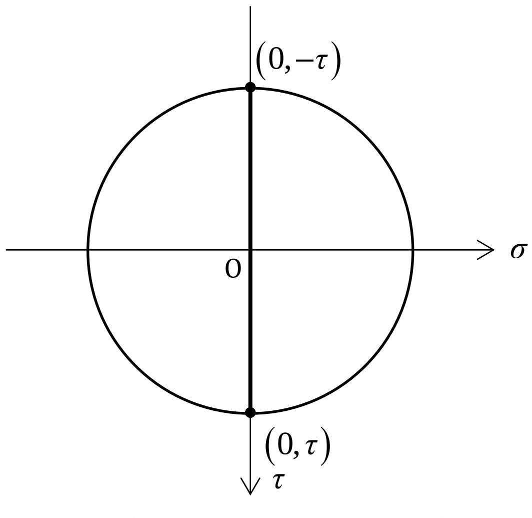


Fig.1.1 *xy* 座標系におけるモールの応力円

nt 座標系における応力状態は，応力円において *xy* 座標系における応力状態から反時計回りに$\dfrac{\pi}{2}$回転することで表せる．

$$[\sigma_{nt}] = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} \tag{3}$$

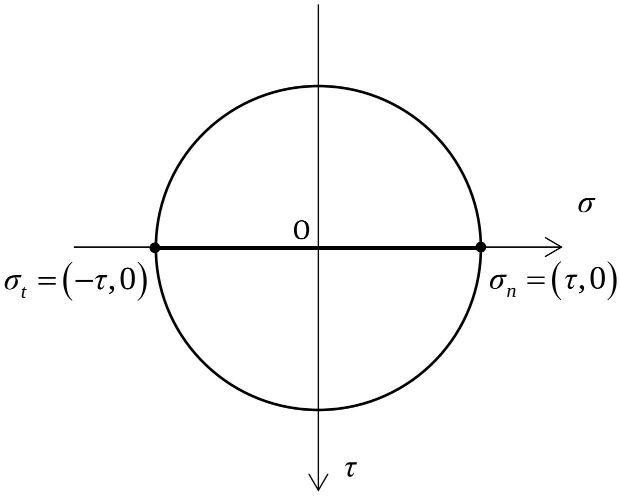


Fig.1.2 *nt* 座標系におけるモールの応力円

(3) 点 B$(2,2)$が点 B'$(2+\delta,2)$になったとして，幾何学的な考察から長さ$\overline{\mathrm{OB'}}$をδを含む式で示せ．また，*n* 方向垂直ひずみε_nを求めよ．

三平方の定理より，（微小量δ^2は無視できる）

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OB'}} &= \sqrt{(2+\delta)^2+2^2} \\ &= \sqrt{8+4\delta+\delta^2} \\ &\fallingdotseq 2\sqrt{2+\delta}\end{aligned} \tag{4}$$

となる．OB の長さを$\overline{\mathrm{OB}}$とすると，*n* 方向の垂直ひずみε_nは

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{\overline{\mathrm{OB'}}-\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OB}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2+\delta}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{5}$$

となる．ここで，$\dfrac{\delta}{2} \ll 1$を考慮すると以下のように求められる．

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \frac{2\sqrt{2+\delta}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{1+\frac{\delta}{2}}-1 \\
&\fallingdotseq \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{2}\right)-1 \\
&= \frac{\delta}{4}
\end{aligned} \tag{6}
$$

(4) (2)で求めた *nt* 座標系における応力成分と応力ひずみの関係式から，*n* 方向の垂直ひずみ ε_n を τ を含む式で求めよ．

応力-ひずみの関係式より，

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \frac{1}{E}\left(\sigma_n - \nu\sigma_t\right) \\
&= \frac{1}{E}\left\{\tau - \nu\left(-\tau\right)\right\} \\
&= \frac{\left(1+\nu\right)}{E}\tau
\end{aligned} \tag{7}
$$

となる．

(5) (3)と(4)で求めたひずみは一致する．*E*，*G*，ν の関係式を求めよ．

(3)および(4)より，

$$
\frac{\left(1+\nu\right)}{E}\tau = \frac{\delta}{4} \tag{8}
$$

が得られる．一方，(1)より，

$$
\tau = G\gamma_{xy} = G\frac{\delta}{2} \tag{9}
$$

が得られる．以上より，

$$
\frac{\left(1+\nu\right)}{E}G\frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{4} \tag{10}
$$

となるので，

$$
G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} \tag{11}
$$

と求められる．

[2] 図 2 は z 方向に十分薄い弾性体の板状部材(長さ L，高さ h，厚さ t)が剛体壁の内側にはめ込まれている様子を示している．図 2 のように y 方向に両端から圧縮荷重 P が作用している．板材は点線部から実線部に変形するが，この図ではイメージしやすくするために変形が大きく描かれている． x 軸から反時計回りに $\theta = 45^\circ$ 傾いた方向にひずみゲージが貼り付けられている．このひずみゲージから $\varepsilon_\theta = -100\mu$ の値を得た．壁からの摩擦力は無く，部材の変形は一様であるとして以下の設問に答えよ．ただし，弾性体の材料定数を縦弾性係数 $E = 200\text{GPa}$ ，ポアソン比 ν ＝0.3 とし有効数字 3 桁で答えよ．

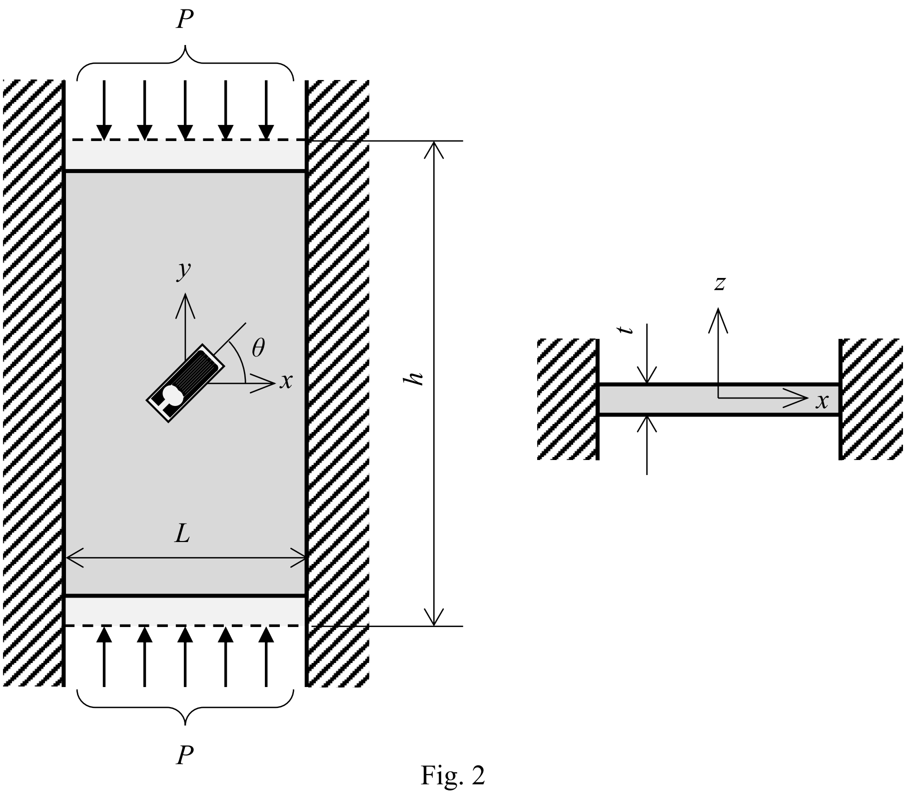


Fig. 2

(1) 部材内の応力成分をすべて求めよ(E，ν，L，h，t，P を用いよ)．

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym & & \sigma_z \end{pmatrix}$$

(2) ε_y を求めよ．

(3) σ_y を求めよ．

(4) y 方向に作用する荷重 P を求めよ．このとき L=30mm，h=90mm，t=0.3mm とする．

[2]

(1)　部材内の応力成分をすべて求めよ(E，v，L，h，t，P を用いよ).

σ_y は y 方向に圧縮荷重 P が作用することから

$$\sigma_y = -\frac{P}{Lt} \tag{2.1}$$

となる．板厚が十分に薄いことから xy 平面において平面応力状態であるので

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{2.2}$$

となる．また，剛体壁と部材間に摩擦が生じないため

$$\tau_{xy} = 0 \tag{2.3}$$

となる．x 軸方向は剛体壁で固定されているので yz 面において平面ひずみ状態となるので

$$\varepsilon_x = 0 \tag{2.4}$$

となる．ひずみと応力の関係式と式(2.1)，(2.2)，(2.4)から σ_x は

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z)\right] = 0 \\
&\sigma_x = v\sigma_y \\
&\therefore \sigma_x = -\frac{vP}{Lt}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

となり，式(2.1)~(2.5)より応力成分は以下のように求まる．

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym & & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{vP}{Lt} & 0 & 0 \\ & -\dfrac{P}{Lt} & 0 \\ sym & & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

(2)　ε_y を求めよ.

ひずみの座標変換式は次式のように表せる．

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{2.7}$$

式(2.7)に $\theta = 45^\circ$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\theta &= \varepsilon_x \cos^2 45^\circ + \varepsilon_y \sin^2 45^\circ + \gamma_{xy}\sin 45^\circ \cos 45^\circ \\
&= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy})
\end{aligned} \tag{2.8}$$

となる．応力とひずみの関係式と式(2.3)から

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \tag{2.9}$$

となり，式(2.4)，(2.8)，(2.9)より ε_y は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}) = \frac{1}{2}\varepsilon_y \\ \therefore \varepsilon_y &= 2\varepsilon_\theta = -200\mu \end{aligned} \tag{2.10}$$

(3) $\boldsymbol{\sigma_y}$ を求めよ．

xy 平面において平面応力状態であることから，応力とひずみの関係式と式(2.10)を用いることにより σ_y は以下のように求まる．

$$\sigma_y = \frac{E}{1-v^2}(v\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{200}{1-0.09} \cdot -200\mu = -44.0[\mathrm{MPa}] \tag{2.11}$$

(4) $\boldsymbol{y}$ 方向に作用する荷重 $\boldsymbol{P}$ を求めよ．このとき $\boldsymbol{L}$=30mm，$\boldsymbol{h}$=90mm，$\boldsymbol{t}$=0.3mm とする．

式(2.1)と式(2.11)より荷重 P は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} -\frac{P}{Lt} &= -44.0[\mathrm{MPa}] \\ P &= 44.0[\mathrm{MPa}] \times Lt = 44.0[\mathrm{MPa}] \times 9[\mathrm{mm}^2] = 396[\mathrm{N}] \end{aligned} \tag{2.12}$$

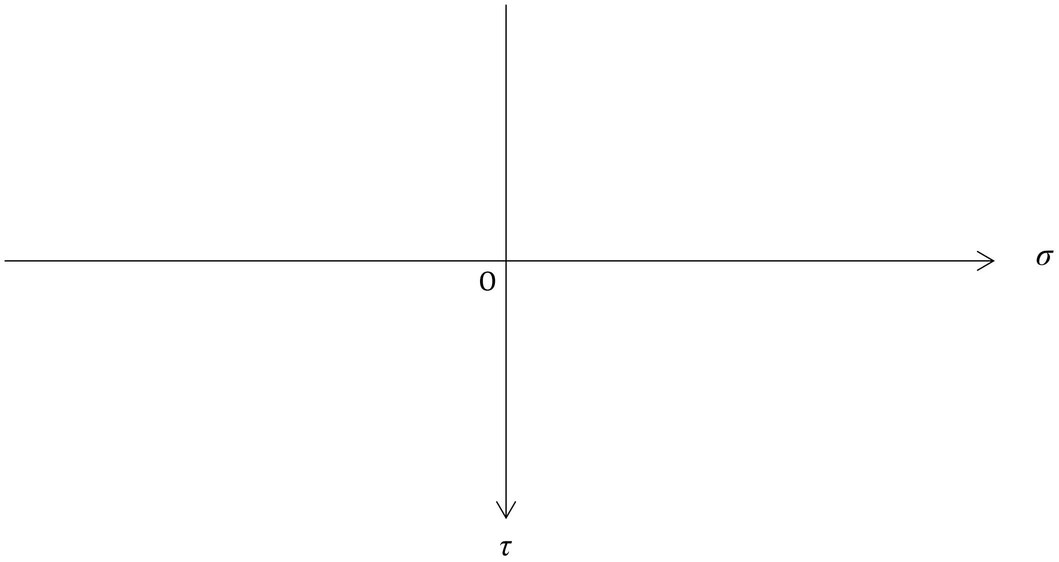
2018/5/29	材料の力学 1 第 6 回演習	学籍番号 _ _ _ _ _ _ _ _ - _ 名前

解答欄

[1]

(1) $\varepsilon_x =$, $\varepsilon_y =$, $\gamma_{xy} =$

(2) ①モールの応力円



②$[\sigma_{nt}] =$

(3) ①$\overline{\mathrm{OB'}} =$	②$\varepsilon_n =$
(4) $\varepsilon_n =$	(5)

※解答欄以外には何も記入しないこと.

[2]

(1)	$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym & & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$
(2)	$\varepsilon_y =$
(3)	$\sigma_y =$
(4)	$P =$

※解答欄以外には何も記入しないこと.