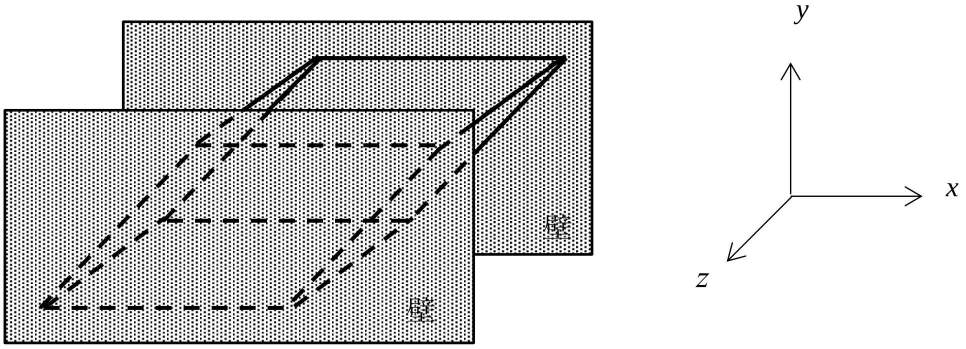
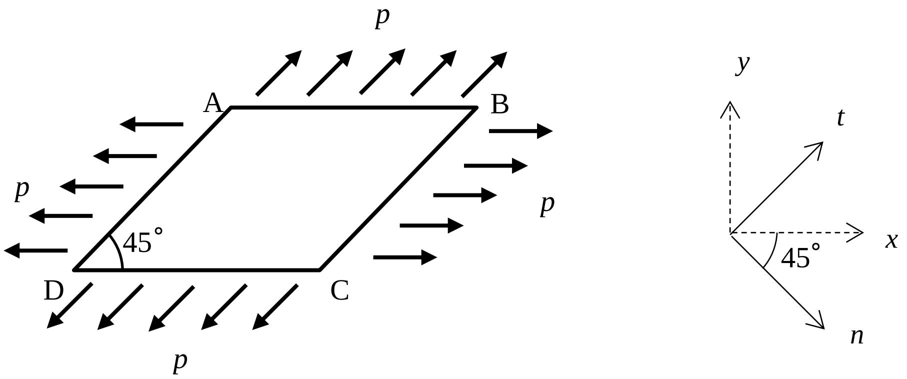
材料の力学 1　Step1　第 5 回演習問題（2018/5/22 実施）

[1]　図 1 に示すように，z 方向が壁で固定され，$p=8\sqrt{2}$ [MPa]の応力ベクトルが x 方向および t 方向に一様に作用している弾性体を考える．以下の設問に答えよ．ただし，ポアソン比 ν は $\nu=0.3$ とする．必要であれば $\sqrt{2}=1.41$ を用いて，**有効数字 3 桁**で解答せよ．



(a) 3 次元的に見た様子(見やすさのため応力ベクトルは省略してある)



(b) z 方向から 2 次元的に見た様子

Fig. 1 両端を壁で固定された弾性体

(1)　図 1(b)より，x-y 座標系からみた辺 AB の垂直応力 σ_y，せん断応力 τ_{xy} と，n-t 座標系からみた辺 BC の垂直応力 σ_n，せん断応力 τ_{nt} を求めよ．

(2)　応力の座標変換を行うことで 応力 σ_x を求めよ．

座標変換の式　$$\sigma_n=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta+2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

(3)　x-y 座標における応力テンソルを求め，それをもとにモールの応力円を描きその中心と半径を求めよ．

(4)　x-y-z 座標系における主応力（$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$）を求めよ．また，それをもとに最大せん断応力 τ_{max} をもとめよ．ただし，図 1 の弾性体は平面ひずみ状態であり，$\sigma_z=\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)$ であることに注意せよ．

(1)　図 1(b)より，*x-y* 座標系からみた辺 AB の垂直応力 σ_y，せん断応力 τ_{xy} と，*n-t* 座標系からみた辺 BC の垂直応力 σ_n，せん断応力 τ_{nt} を求めよ．

まず AB 面に作用する応力ベクトル *p* を図 1.1 のように分解する． $p = 8\sqrt{2}$ より，垂直応力 σ_y，せん断応力 τ_{xy} は以下のように求まる．

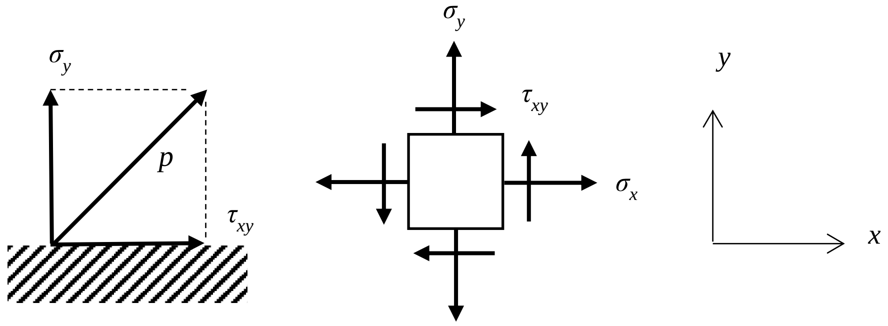


Fig.1.1 AB 面の応力ベクトル

$$\begin{cases} \sigma_y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times p = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} = 8 \\ \tau_{xy} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times p = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} = 8 \end{cases} \quad \text{[MPa]} \tag{2.1}$$

x-y 座標系から時計回りに 45°回転した座標系を *n-t* 座標系とすると，応力ベクトル *p* は図 1.2 のように分解できるよって垂直応力 σ_n，せん断応力 τ_{nt} は以下のように求まる．

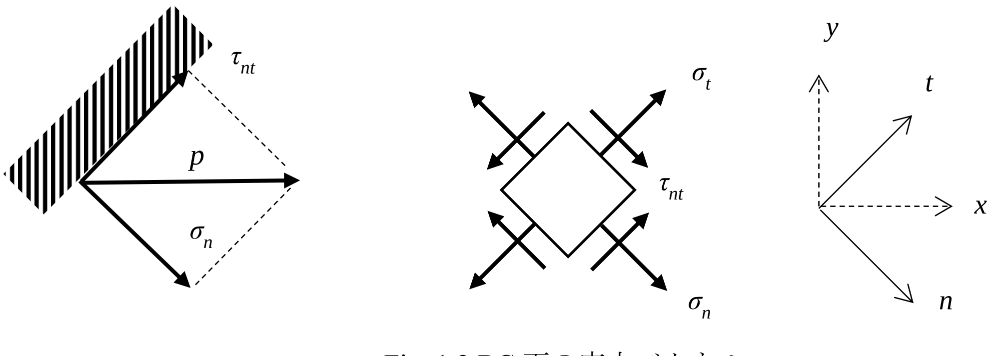


Fig. 1.2 BC 面の応力ベクトル

$$\begin{cases} \sigma_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times p = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} = 8 \\ \tau_{nt} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times p = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} = 8 \end{cases} \quad \text{[MPa]} \tag{2.2}$$

(2)　応力の座標変換を行うことで 応力 σ_x を求めよ.

σ_x は σ_n と τ_{nt} に対して応力の座標変換を行って求める. 座標変換の式は以下のように与えられる.

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta\cos\theta \tag{2.3}$$

式(2.3)に式(2.1)および式(2.2)の結果に $\theta = -45^\circ$ を代入すると σ_x が求まる. 従って

$$\sigma_x = 24 \quad \text{[MPa]} \tag{2.4}$$

となる.

(3)　*x-y* 座標における応力テンソルを求め, それをもとにモールの応力円を描きその中心と半径を求めよ.

式(2.1)および式(2.3)より *x-y* 座標系における応力テンソルは以下のようになる.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{[MPa]} \tag{2.5}$$

以上よりモールの応力円を図示すると以下のようになる.

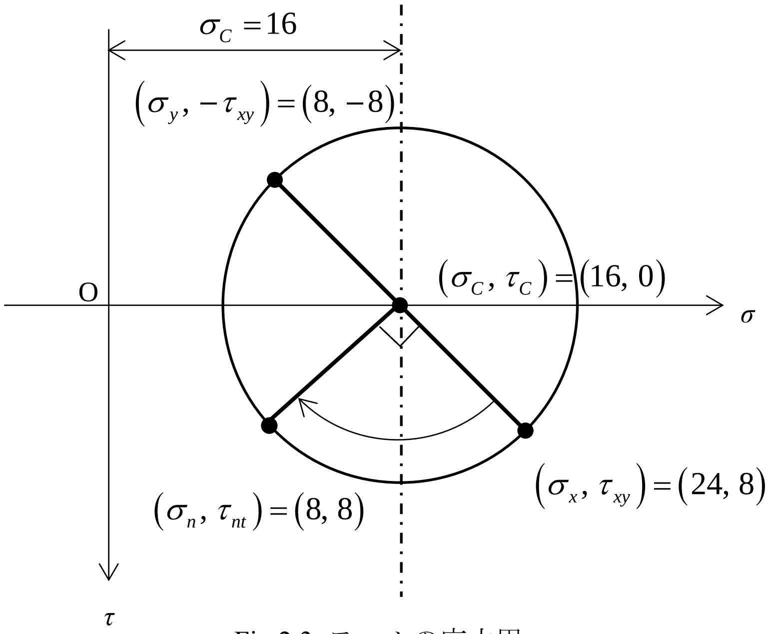


Fig.2.3 モールの応力円

モールの応力円の中心および半径は以下のように求められる.

$$\sigma_C = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}\left(8 + 24\right) = 16 \quad \text{[MPa]} \tag{2.6}$$

より

$$\left(\sigma_C,\ 0\right) = \left(16,\ 0\right) \quad \text{[MPa]} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(24-8)^2 + 4\times(8)^2} \\ &= 8\sqrt{2} = 11.3 \quad \text{[MPa]} \end{aligned} \tag{2.8}$$

(4)　*x-y-z* 座標系における主応力（$\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$）を求めよ．また，それをもとに最大せん断応力 $\boldsymbol{\tau_{max}}$ をもとめよ．ただし，図 1 の弾性体は平面ひずみ状態であり，$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$ であることに注意せよ．

(3)の結果より主応力 σ_1, σ_2 は以下のように求まる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_C + r \\ \sigma_C - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 + 8\sqrt{2} \\ 16 - 8\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.3 \\ 4.72 \end{pmatrix} \quad \text{[MPa]} \tag{2.9}$$

本問題では z 方向が壁で固定されており平面ひずみ状態とみなせるため σ_3 は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) \\ &= 0.3\times\left(16 + 8\sqrt{2} + 16 - 8\sqrt{2}\right) = 9.60 \quad \text{[MPa]} \end{aligned} \tag{2.10}$$

よって

$$\left(\sigma_1, \sigma_2\ \sigma_3\right) = \left(27.3,\ 4.72,\ 9.60\right) \quad \text{[MPa]} \tag{2.11}$$

以上より σ_1 ＞ σ_3 ＞ σ_2 であるので，最大せん断応力 τ_{max} は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{27.3 - 4.72}{2} \\ &= 11.3 \quad \text{[MPa]} \end{aligned} \tag{2.12}$$

また，これら主応力を図示すると以下の図 2.4 のようになる．

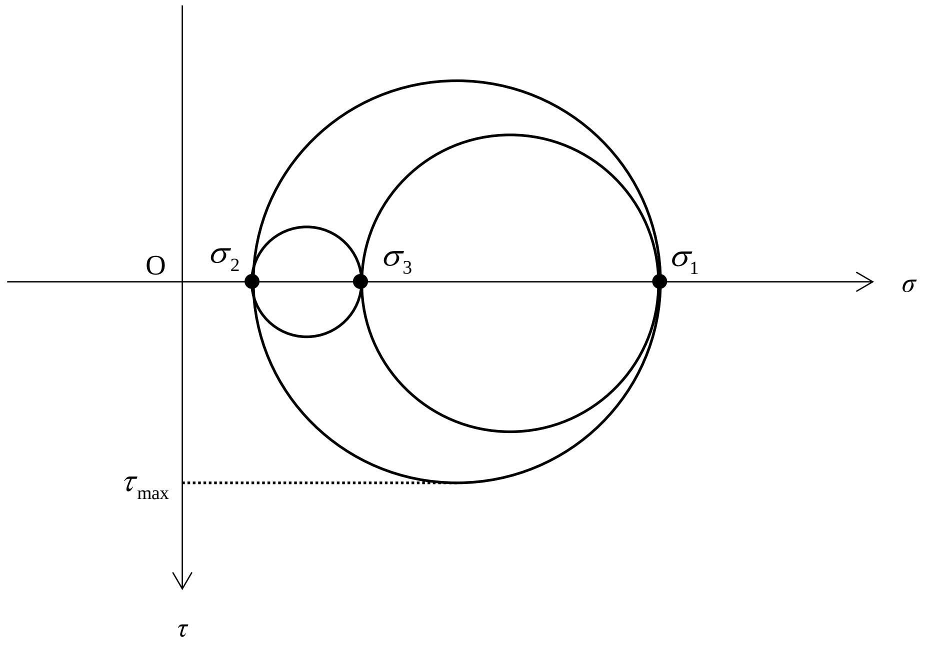


Fig.2.4 モールの応力円

[2] 板厚が十分に薄い弾性体表面のある点での応力状態を求めるため，図 2 に示すような45°傾けた三軸ひずみゲージを貼り付けた．それぞれのひずみゲージから測定した値は ε_x=315μ，ε_y=115μ，$\varepsilon_{45°}$=115μ（μ=1.0×10^{-6}）であった．この弾性体の縦弾性定数 E=91 GPa，ν=0.3 とし以下の設問に答えよ．ただし，回転方向は**反時計回りを正**とし，必要であれば$\sqrt{2}=1.41$を用いて，**有効数字 3 桁**で解答せよ．

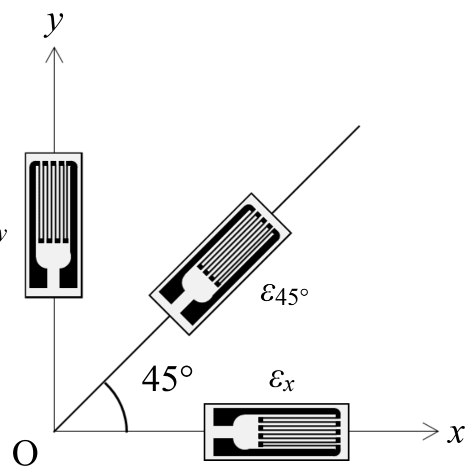


Fig.2 三軸ひずみゲージ模式図

(1) (i) 各ひずみゲージの値とひずみの座標変換式より，せん断ひずみ γ_{xy} を求め，x-y 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]を求めよ．

(ii) 求めたひずみテンソルより，モールのひずみ円を描き，その中心と半径を示せ．

(2) 前問で描いたモールのひずみ円より，主ひずみ(ε_1，ε_2)および主ひずみ方向(θ_1，θ_2)を求めよ．ただし，$-90° \le \theta_1, \theta_2 \le 90°$ とする．

(3) (i) 応力—ひずみの関係式※より，x-y 座標系における応力テンソル[σ_{ij}]を求めよ．

(ii) 求めた応力テンソルより，モールの応力円を描き，その中心と半径を示せ．

(4) 前問で描いたモールの応力円より，主応力(σ_1，σ_2)および主応力方向(θ_1，θ_2)を求め，(2)で求めた主ひずみ方向との関係性を述べよ．

※ひずみの座標変換式

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta\cos\theta$$

※応力—ひずみの関係式

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right),\quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right),\quad \tau_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy}$$

[[2]

(1) (i) ひずみの座標変換式は次式で表される．

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{2.1}$$

式(2.1)に θ=45°を代入すると次式が得られる．

$$\varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon_x \cos^2(45^\circ) + \varepsilon_y \sin^2(45^\circ) + \gamma_{xy}\sin(45^\circ)\cos(45^\circ) \tag{2.2}$$

上式に各ひずみゲージで計測した値 ε_x=315μ，ε_y=115μ，ε_{45°=115μ を代入し，γ_{xy} について整理することでせん断ひずみを算出できる．

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{45^\circ} - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\\ &= 2\times 115\mu - (315+115)\mu\\ &= -200\mu\end{aligned} \tag{2.3}$$

これより *x*-*y* 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]は次のようになる．

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 315\mu & \text{-}100\mu \\ \text{-}100\mu & 115\mu \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

(ii) (i)より求めた $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2) = (315\mu, -100\mu)$，$(\varepsilon_y, -\gamma_{xy}/2) = (115\mu, 100\mu)$ をプロットしてモールのひずみ円を描くと図 2.1 のようになる．

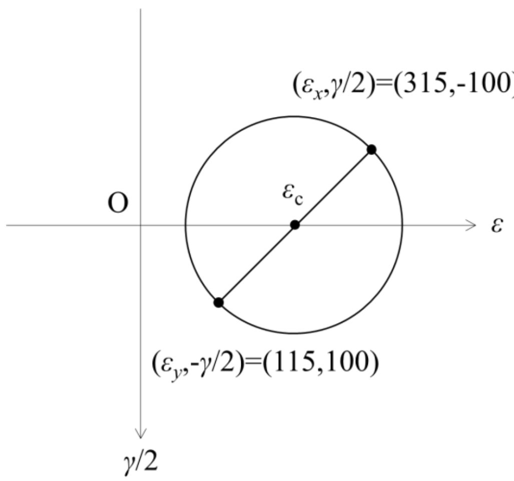


Fig.2.1 モールのひずみ円

中心座標$(\varepsilon_\mathrm{c}, 0)$は以下のように求められる．

$$(\varepsilon_\mathrm{c}, 0) = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_\mathrm{y}}{2}, 0\right) \tag{2.5}$$
$$= \left(\frac{315\mu + 115\mu}{2}, 0\right) = (215\mu, 0)$$

また半径 r は以下の式より求められる．

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{2.6}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(315\mu - 115\mu\right)^2 + 4\left(100\mu\right)^2} = 141\mu$$

(2) 主ひずみ(ε_1，ε_2)および主ひずみ方向(θ_1，θ_2)はモールのひずみ円上において以下の図2.2 のように表される．

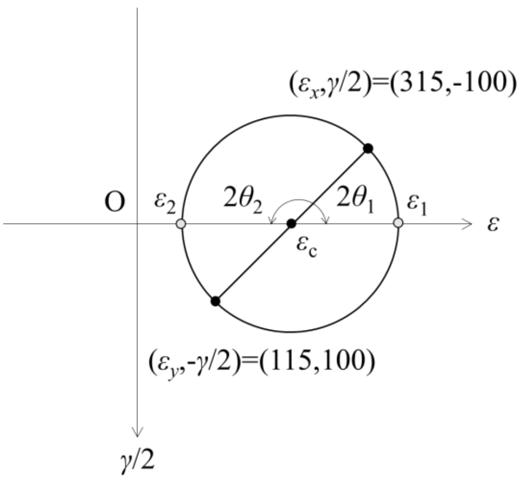


Fig.2.2 主ひずみおよび主ひずみ方向

上図より主ひずみおよび主ひずみ方向は以下のように求まる．

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_\mathrm{c} + r\\ \varepsilon_\mathrm{c} - r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}215\mu + 141\mu\\ 215\mu - 141\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}356\mu\\ 74\mu\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{2}tan^{-1}\left|\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right|$$
$$= -\frac{1}{2}tan^{-1}\left|\frac{200\mu}{315\mu - 115\mu}\right| = -22.5 \ \left[deg\right] \tag{2.8}$$

主ひずみ方向は直交するので，$\theta_2 = \theta_1 + 90 = 67.5$ deg と得られ，主ひずみ方向は,

$$\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-22.5 \\ 67.5\end{pmatrix} \ \left[deg\right] \tag{2.9}$$

(3) (i) 応力—ひずみの関係式※より，*x*-*y* 座標系における各応力は以下のように求まる．

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$
$$= \frac{91\times10^9}{1-0.3^2}\times\left(315+0.3\times115\right)\times10^{-6} = 35.0 \ \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.10}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)$$
$$= \frac{91\times10^9}{1-0.3^2}\times\left(115+0.3\times315\right)\times10^{-6} = 21.0 \ \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.11}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy}$$
$$= \frac{91\times10^9}{2\times\left(1+0.3\right)}\times\left(-200\right)\times10^{-6} = -7.00 \ \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.12}$$

したがって，応力テンソルは以下のようになる．

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}35.0 & -7.00 \\ -7.00 & 21.0\end{pmatrix} \ \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.13}$$

(ii) (i)より求めた$\left(\sigma_x, \tau_{xy}\right) = \left(35.0, -7.00\right)$，$\left(\sigma_y, -\tau_{xy}\right) = \left(21.0, -7.00\right)$をプロットしてモールの応力円を描くと図 2.3 のようになる

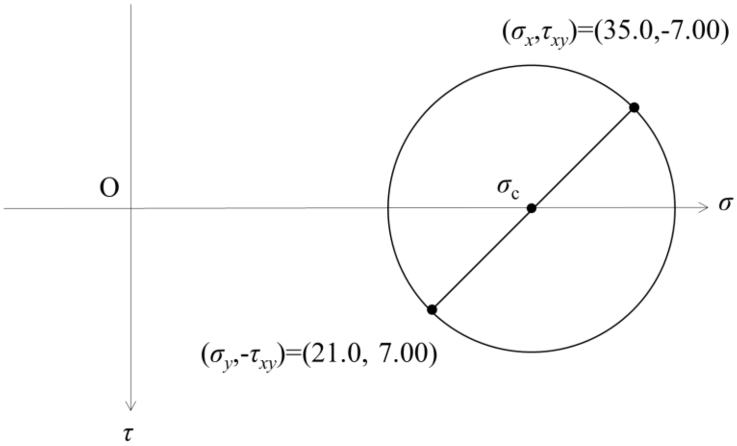


Fig.2.3 モールの応力円

中心座標$\left(\sigma_c, 0\right)$は以下のように求められる．

$$
\begin{aligned}
\left(\sigma_c, 0\right) &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) \\
&= \left(\frac{35.0 + 21.0}{2}, 0\right) = \left(28.0, 0\right) \quad \left[\mathrm{MPa}\right]
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

また半径 r は以下の式より求められる．

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4{\tau_{xy}}^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(35.0 - 21.0\right)^2 + 4\left(-7.00\right)^2} = 9.87 \quad \left[\mathrm{MPa}\right]
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

(4) 主応力(σ_1，σ_2)および主応力方向(θ_1，θ_2)はモールの応力円上において以下の図 2.4 のように表される．

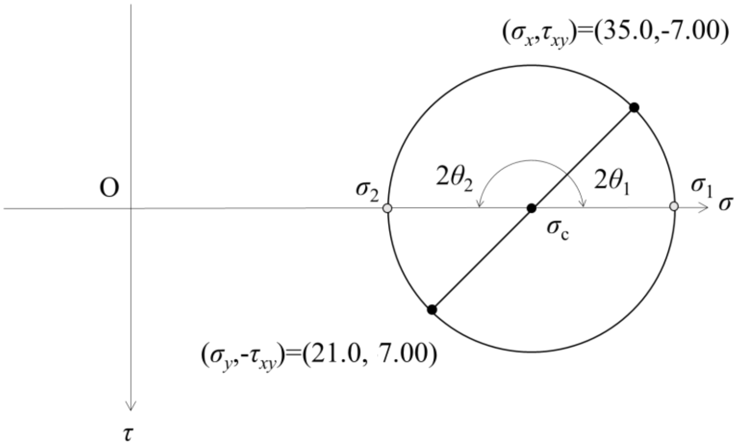


Fig.2.4 主応力および主応力方向

上図より主応力および主応力方向は以下のように求まる．

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_c+r\\ \sigma_c-r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28.0+9.87\\ 28.0-9.87\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37.9\\ 18.1\end{pmatrix}\ \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\theta_1&=-\frac{1}{2}tan^{-1}\left|\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right|\\&=-\frac{1}{2}tan^{-1}\left|\frac{2\times 7.00}{35.0-21.0}\right|=-22.5\ \left[deg\right]\end{aligned} \tag{2.17}$$

主応力方向は直交するので，$\theta_2=\theta_1+90=67.5$ deg と得られ，主応力方向は,

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22.5\\ 67.5\end{pmatrix}\ \left[deg\right] \tag{2.18}$$

となる．上式および式(2.9)より，主応力方向と主ひずみ方向は一致することがわかる．