

## 材料の力学 1 Step1 第 4 回演習問題(2018/5/15 実施)

[1] 図 1 は板厚が十分に薄い弾性体のある点における応力状態を示したものである。なお、図 1(c)は図 1(a), (b)の応力状態を重ね合わせたときの様子を示している。このとき、以下の設問に答えよ。ただし、 $z$  方向は板厚方向とし、十分に薄いため平面応力状態と考えることができる。

解答には単位を明記すること。

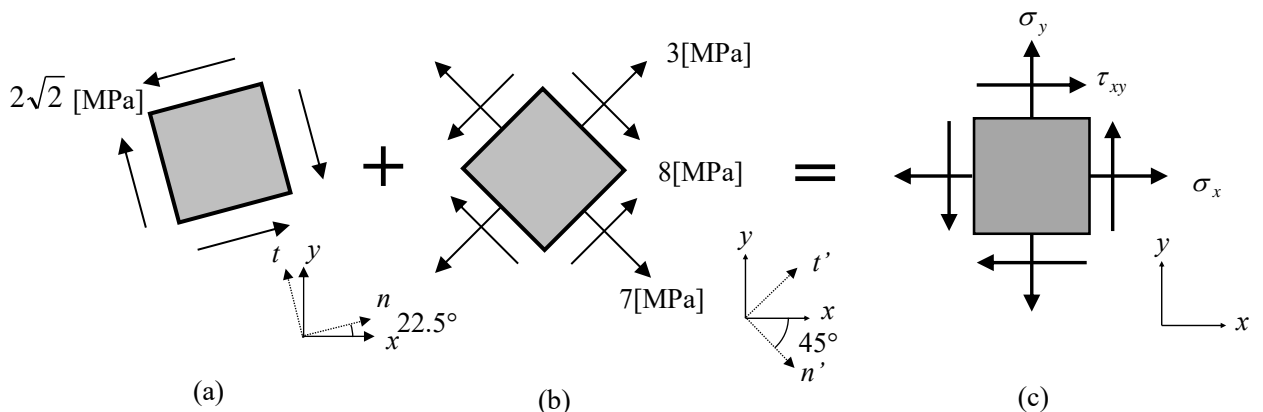


Fig. 1 微小要素における応力状態.

Fig. 1 (a)について、以下の設問に答えよ。

- (1)  $n$ - $t$  座標系においてモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。
- (2) 主応力 ( $\sigma_1, \sigma_2$ ), 主応力方向 ( $\theta_1, \theta_2$ ) を求めよ。  
(ただし、反時計回りを正,  $-90^\circ < \theta_1 < \theta_2 < 90^\circ$  とする.)
- (3)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ。

Fig. 1 (b)について、以下の設問に答えよ。

- (4)  $n'$ - $t'$  座標系においてモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。
- (5)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ。

Fig. 1 (c)について、以下の設問に答えよ。

- (6) モールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。
- (7) 板に作用する ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) を求め、最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ。

[1]

(1)  $n$ - $t$  座標系においてモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。

図 1(a)について応力テンソルは以下のように示される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (1.1)$$

応力テンソルより図 1.1 のようにモールの応力円が描ける。

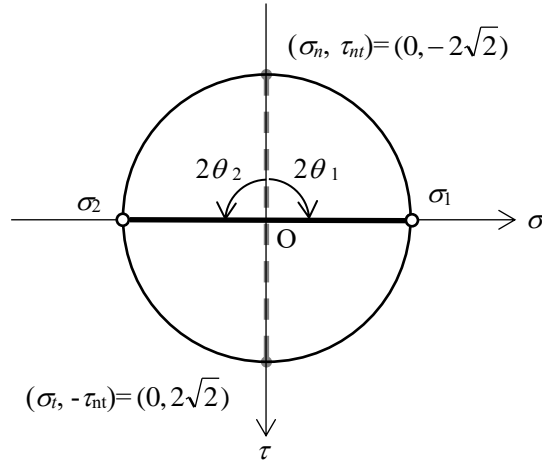


Fig. 1.1 (a)におけるモールの応力円

モールの応力円の中心 $\sigma_c$ および、半径 $r$ は以下のように求められる。

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \text{ [MPa]} \quad (1.2)$$

より,

$$(\sigma_c, 0) = (0, 0) \text{ [MPa]} \quad (1.3)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(0 + 0)^2 + 4 \times (-2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2} \text{ [MPa]} \quad (1.4)$$

(2) 主応力 $(\sigma_1, \sigma_2)$ 、主応力方向 $(\theta_1, \theta_2)$ を求めよ。

図 1.1 より、主応力 $(\sigma_1, \sigma_2)$ 、主方向 $(\theta_1, \theta_2)$ は以下のように求まる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_c + r \\ \sigma_c - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ [MPa]} \quad (1.5)$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-4\sqrt{2}}{0 - 0} = -\frac{4\sqrt{2}}{0} \quad (1.6)$$

$$\therefore 2\theta_1 = -90^\circ \Leftrightarrow \theta_1 = -45^\circ \quad (1.7)$$

二つの主方向は互いに直交するので,

$$\theta_2 = 90^\circ + \theta_1 = 90 - 45 = 45^\circ \quad (1.8)$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45^\circ \\ 45^\circ \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

(3)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ.

時計回りに  $\theta=22.5^\circ$  回転させれば良いので, モールの応力円上では  $2\theta=45^\circ$  時計回りに回転させる. よって, 図 1.2 のモールの応力円より以下のように求められる.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (1.10)$$

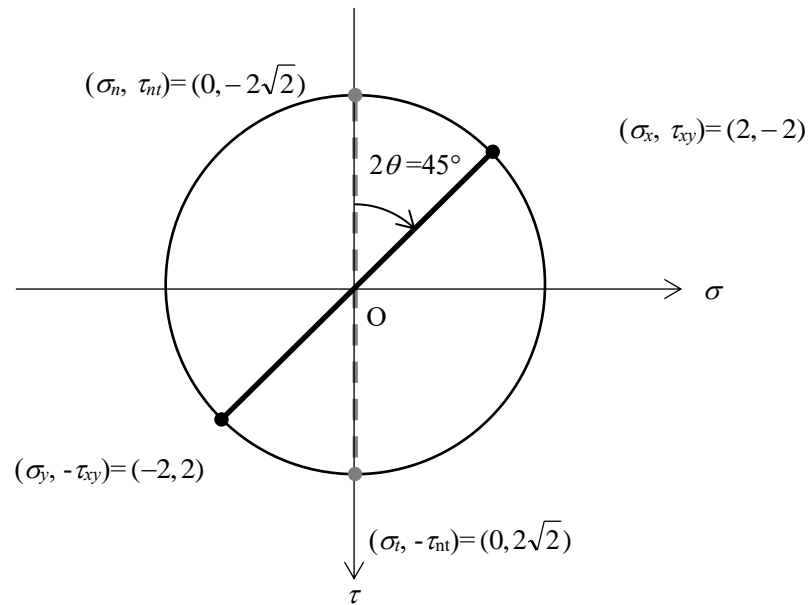


Fig. 1.2 (a)におけるモールの応力円

(4)  $n'$ - $t'$ 座標系においてモールの応力円を描き, その中心と半径を求めよ.

図 1(b)について  $n'$ - $t'$ 座標系での応力テンソルは以下のように示される.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{n'} & \tau_{n't'} \\ \tau_{n't'} & \sigma_{t'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (1.11)$$

応力テンソルより図 1.3 のようにモールの応力円が描ける.

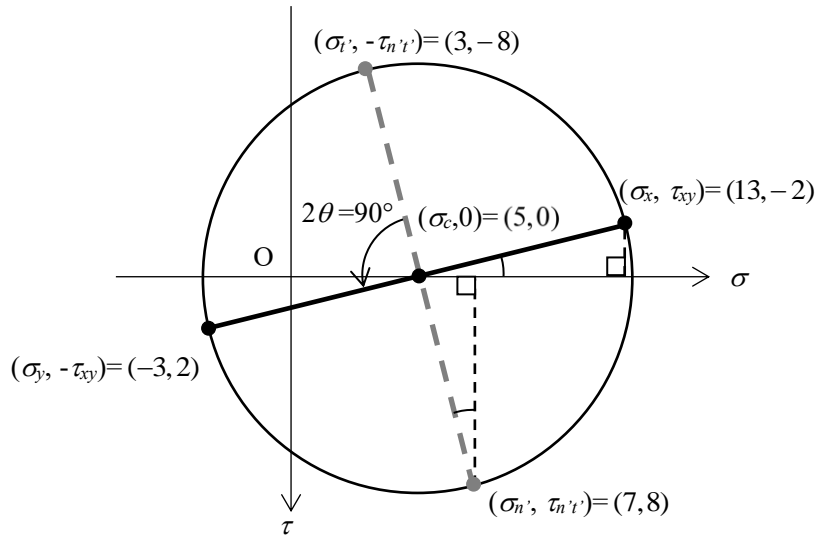


Fig. 1.3 (b)におけるモールの応力円

応力テンソルよりモールの応力円の中心 $\sigma_c$ および、半径 $r$ は以下のように求められる．

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_{n'} + \sigma_{t'}) = \frac{1}{2}(7 + 3) = 5 \text{ [MPa]} \quad (1.12)$$

より

$$(\sigma_c, 0) = (5, 0) \text{ [MPa]} \quad (1.13)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{n'} - \sigma_{t'})^2 + 4\tau_{n't'}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(7 - 3)^2 + 4 \times 8^2} = 2\sqrt{17} \text{ [MPa]} \quad (1.14)$$

(5)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ．

反時計回りに  $\theta=45^\circ$  回転させれば良いので，モールの応力円上では  $2\theta=90^\circ$  反時計回りに回転させる． よって， 図 1.3 のモールの応力円より以下のように求められる．

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (1.15)$$

(6) モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

(a)，(b)での  $x$ - $y$  座標系での応力テンソルを合成する．

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (1.16)$$

合成した応力テンソルより，モールの応力円は図 1.4 のように求められる．

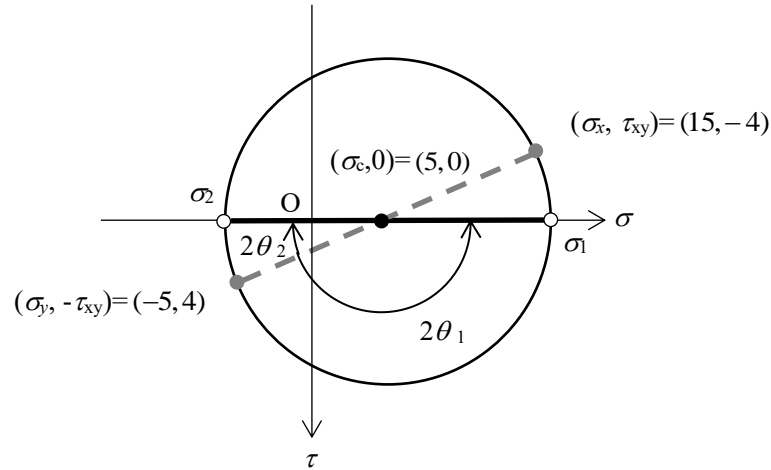


Fig. 1.4 (c)におけるモールの応力円

応力テンソルよりモールの応力円の中心 $\sigma_c$ および，半径 $r$ は以下のように求められる．

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(15 + (-5)) = 5 \text{ [MPa]} \quad (1.17)$$

$$(\sigma_c, 0) = (5, 0) \text{ [MPa]} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(15 - (-5))^2 + 4 \times (-4)^2} \\ &= 2\sqrt{29} \text{ [MPa]} \end{aligned} \quad (1.19)$$

(7) 板に作用する $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を求め，最大せん断応力 $\tau_{\max}$ を求めよ．

図 1.4 より，主応力 $(\sigma_1, \sigma_2)$ は以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_c + r \\ \sigma_c - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\sqrt{29} \\ 5 - 2\sqrt{29} \end{pmatrix} \text{ [MPa]} \quad (1.20)$$

板厚が十分薄く，平面応力状態とみなせるので，板厚方向の主応力  $\sigma_3$  は 0 となる．したがって，(c)において主応力  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  は以下のようになる．

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (5 + 2\sqrt{29}, 5 - 2\sqrt{29}, 0) [\text{MPa}] \quad (1.21)$$

(本来は  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  であるが，先に  $\sigma_1, \sigma_2$  を求めたため板厚方向の主応力を  $\sigma_3$  と置いた．)

$\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$  なのでモールの応力円は図 1.5 のように求められる．よって板に作用する最大せん断応力  $\tau_{\max}$  は，

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{5 + 2\sqrt{29} - (5 - 2\sqrt{29})}{2} \\ &= 2\sqrt{29} [\text{MPa}] \end{aligned} \quad (1.22)$$

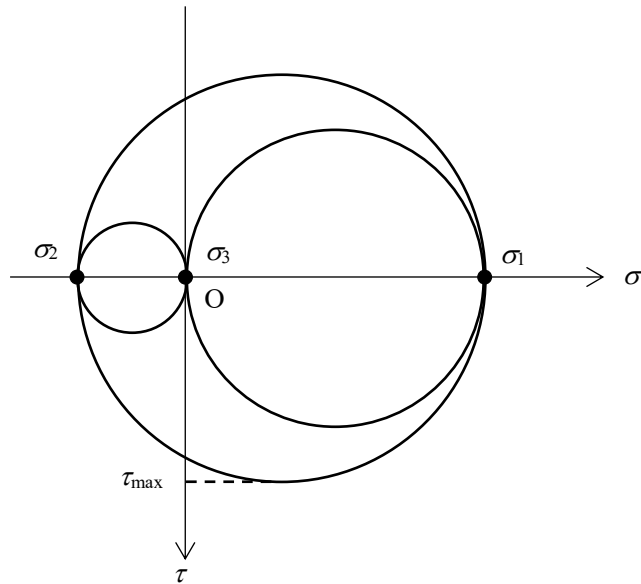


Fig. 1.5 (c)におけるモールの応力円

- [2] 点 A, 点 E において壁に固定された段付き丸棒があり, 図 2 のように分布荷重  $p$  と集中荷重  $P$  が対称に作用している. 丸棒の AB 間, DE 間のヤング率を  $E_1$ , BD 間のヤング率を  $E_2$  とする. 断面積は AB 間, DE 間で  $2S$ , BD 間で  $S$  として, 以下の問いに答えよ.

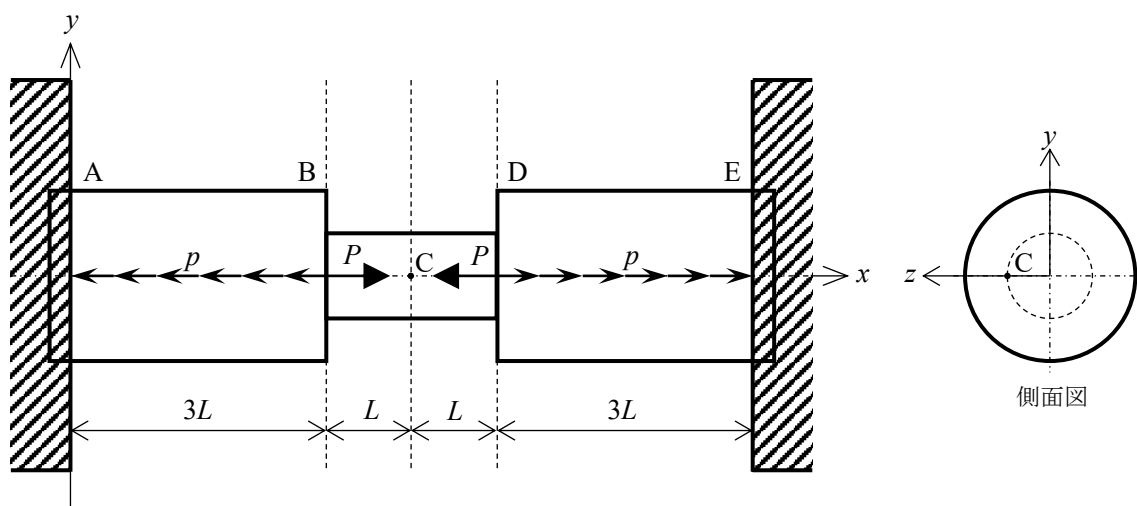


Fig. 2 両端が壁に固定された段付き丸棒.

- (1) FBD を描き, 壁からの反力  $R_A$ ,  $R_E$  を用いて力のつり合い式を示せ.
- (2) 反力  $R_A$  を用いて AC 間に生じる変位  $\delta_{AC}$  を求めよ.
- (3) 対称性を考慮して変位の条件と力のつり合い式から反力  $R_A$ ,  $R_E$  を,  $P$  を用いて求めよ.

また, このとき  $E_1 = \frac{3}{4}E_2$ ,  $pL = \frac{7}{6}P$  とする.

- (4) 丸棒に作用している垂直応力  $\sigma(x)$  の  $x$  方向変化を,  $P$  を用いて図示せよ.
- (5) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き, 点 C に生じる最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ.

[2]

(1) FBD を描き，壁からの反力  $R_A$ ， $R_E$  を用いて力のつり合い式を示せ．

まず初めに，段付き丸棒の FBD を描く．

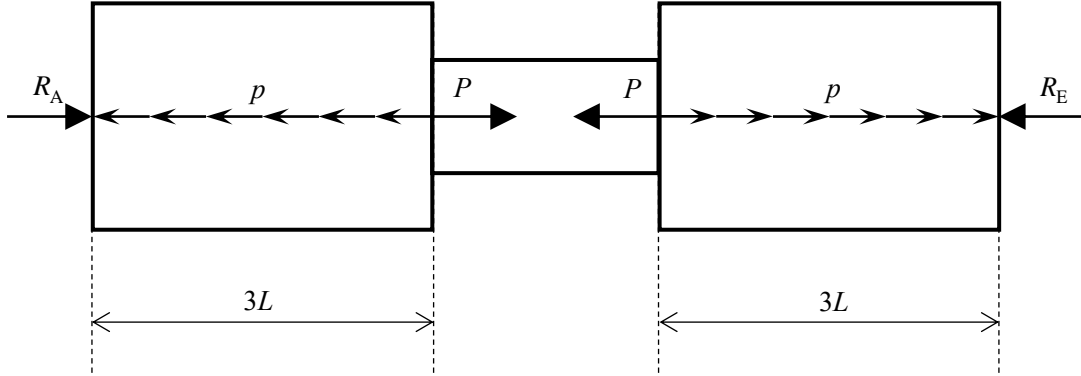


Fig. 2.1 FBD

図 2.1 から力のつり合い式は次のように示される．

$$R_A - 3pL + P - P + 3pL - R_E = 0$$

$$\therefore R_A = R_E \quad (2.1)$$

(2) 反力  $R_A$  を用いて AC 間に生じる変位  $\delta_{AC}$  を求めよ．

変位はひずみを長さで積分したものであり，ひずみは応力を弾性率で除することで求めることができる(フックの法則)．また，応力は軸力を断面積で除することで求められるので，まず，AC 間の位置  $x$  における仮想断面を描き，軸力  $N(x)$  を求める．

i)  $x$  の範囲が  $0 \leq x \leq 3L$  における FBD を描く．

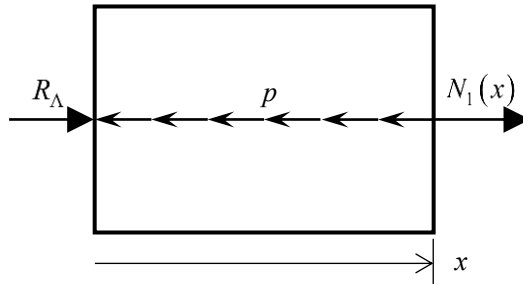


Fig. 2.2 FBD ( $0 \leq x \leq 3L$ )

$$R_A - px + N_1(x) = 0 \quad (2.2)$$

$$N_1(x) = px - R_A \quad (2.3)$$

$$\sigma_1(x) = \frac{px - R_A}{2S} \quad (2.4)$$

$$\delta_{AB} = \int_0^{3L} \frac{px - R_A}{2E_1S} dx = \frac{9pL^2 - 6R_AL}{4E_1S} \quad (2.5)$$



ii)  $x$  の範囲が  $3L < x \leq 4L$  における FBD を描く.

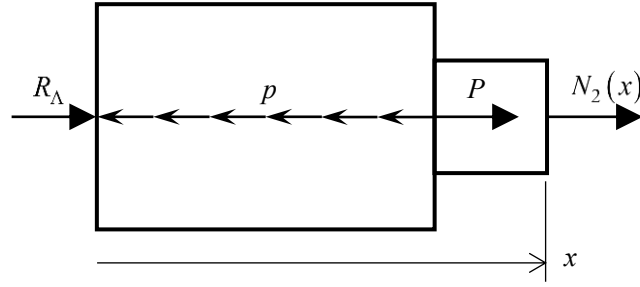


Fig. 2.3 FBD ( $3L < x \leq 4L$ )

$$R_A + P - 3pL + N_2(x) = 0 \quad (2.6)$$

$$N_2(x) = 3pL - P - R_A \quad (2.7)$$

$$\sigma_2(x) = \frac{3pL - P - R_A}{S} \quad (2.8)$$

$$\delta_{BC} = \int_{3L}^{4L} \frac{3pL - P - R_A}{E_2 S} dx = \frac{3pL^2 - PL - R_A L}{E_2 S} \quad (2.9)$$

よって、変位  $\delta_{AC}$  は以下の式から求められる.

$$\begin{aligned} \delta_{AC} &= \delta_{AB} + \delta_{BC} \\ &= \frac{9pL^2 - 6R_A L}{4E_1 S} + \frac{3pL^2 - PL - R_A L}{E_2 S} \end{aligned} \quad (2.10)$$

(3) 対称性を考慮して変位の条件と力のつり合い式から反力  $R_A$ ,  $R_E$  を,  $P$  を用いて求めよ.

また, このとき  $E_1 = \frac{3}{4}E_2$ ,  $pL = \frac{7}{6}P$  とする.

対称性より AC 間に生じる変位は  $\delta_{AC} = 0$  となるので式(2.10)より

$$\delta_{AC} = \frac{9pL^2 - 6R_A L}{4E_1 S} + \frac{3pL^2 - PL - R_A L}{E_2 S} = 0 \quad (2.11)$$

となる. 式(2.11)に  $E_2 = \frac{4}{3}E_1$ ,  $pL = \frac{7}{6}P$  を代入し計算すると

$$\frac{18PL - 9R_A L}{4E_1 S} = 0 \quad (2.12)$$

$$\therefore R_A = 2P \quad (2.13)$$

と求まる. 式(2.1)と式(2.13)より反力  $R_A$ ,  $R_E$  は次のように示される.

$$R_A = R_E = 2P \quad (2.14)$$

(4) 丸棒に作用している垂直応力  $\sigma(x)$  の  $x$  方向変化を,  $P$  を用いて図示せよ.

式(2.14)で求めた反力  $R_A$ ,  $R_E$  を式(2.4), (2.8)に代入し対称性を考慮することで垂直応力  $\sigma(x)$  を求め図示すればよい.

•  $0 \leq x \leq 3L$

$$\sigma_1(x) = \frac{px - 2P}{2S} \quad (2.15)$$

•  $3L < x \leq 4L$

$$\sigma_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{S} \quad (2.16)$$

対称性を考慮することで  $4L < x \leq 8L$  の範囲は計算する必要がなく, 式(2.15), (2.16)から垂直応力  $\sigma(x)$  の  $x$  軸方向変化は図 2.4 のように示される.

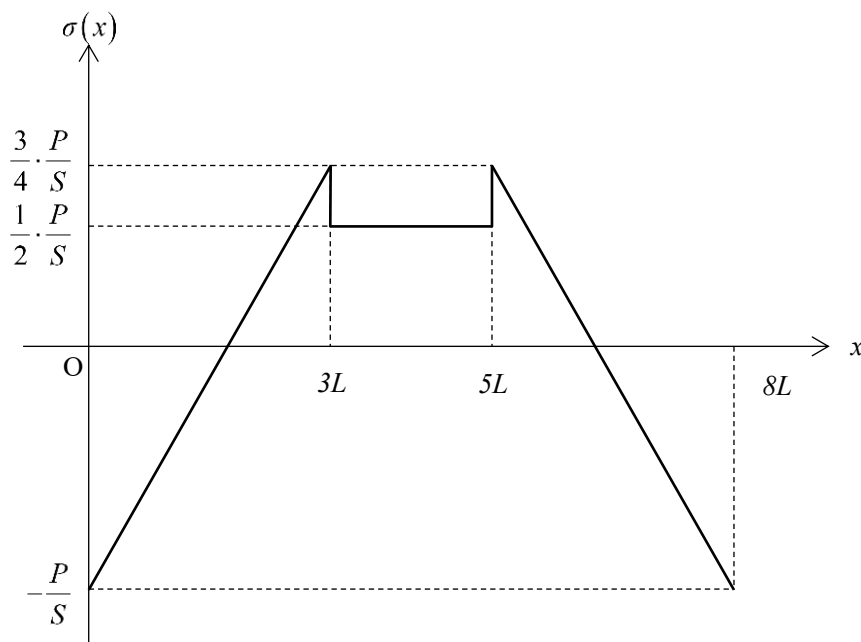


Fig. 2.4 垂直応力分布

(5) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き, 点 C に生じる最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ.

(4)より点 D における応力テンソルは次のように示される.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

式(2.17)の応力テンソルからモールの応力円は図 2.5 のように描ける.

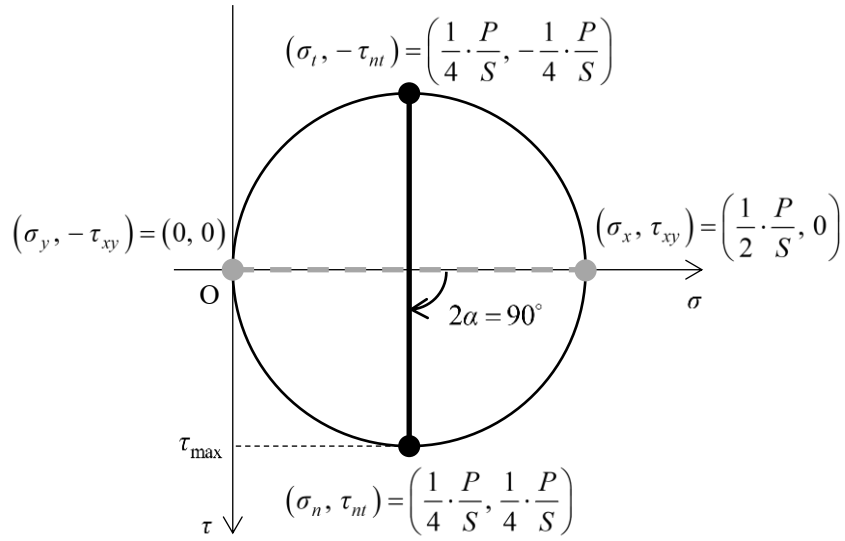


Fig. 2.5 点 D におけるモールの応力円

図 2.5 のモールの応力円より点 D に生じる最大せん断応力は  $x$  軸より  $45^\circ$  傾斜した面に生じることがわかる．最大せん断応力  $\tau_{\max}$  は次のように示される．

$$\tau_{\max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{S} \quad (2.18)$$