

材料の力学1 Step1 第3回演習問題 (2018/05/08 実施)

[1] 図 1.1 のように x 軸方向に引張荷重 P が作用する棒がある。棒の断面積を A とする。

今、図 1.1 (b) x 軸に垂直な面を棒内に 45° 方向に傾けた仮想断面を考える。この仮想断面における応力状態に関する以下の問い合わせよ。

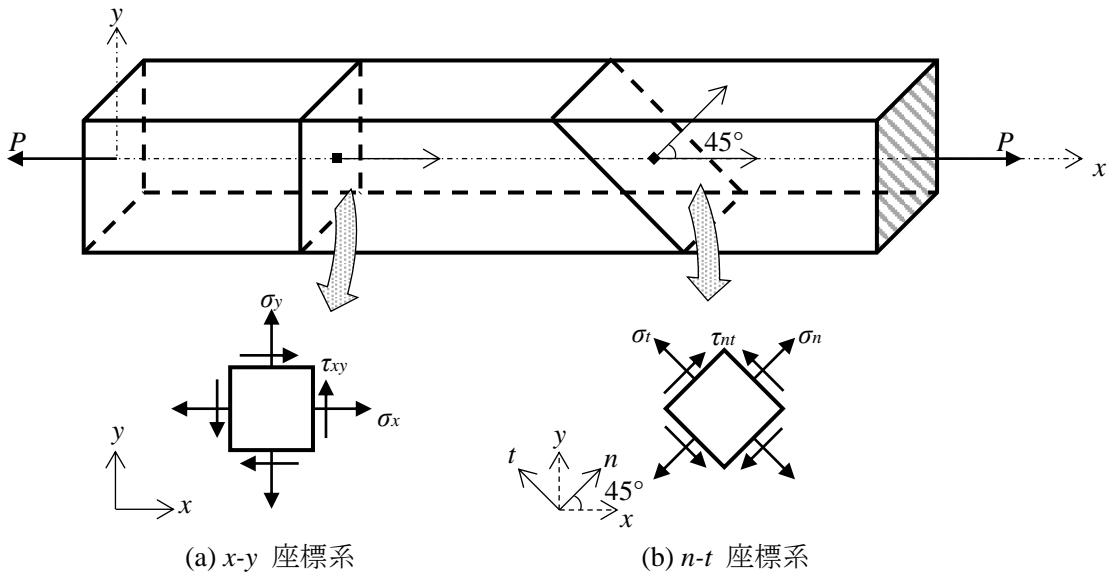


Fig. 1.1 仮想断面における応力状態

まず初めに図 1.1 (a)に示される x 軸に垂直な仮想断面における応力状態を仮想断面を含む微小四角形の応力状態を調査することで考える。

- (1) 図 1.1 (a)における応力状態における応力テンソルを求め、モールの応力円を描け。
- (2) 前問で描いたモールの応力円上に 45° 回転させた仮想断面の状態をプロットし、応力テンソルを求めよ。
- (3) 続いて図 1.2 に示される三角形における力のつり合いより 45° 回転した仮想断面上の応力状態 (σ_n , τ_{nt}) を(1)で求めた図 1.1 (a)における応力状態を用いて求めよ。 (※(2)の解と同じになることを確認できる)

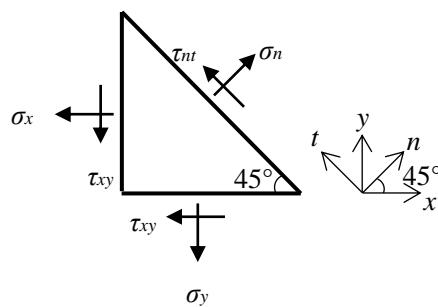


Fig. 1.2 n - t 座標系における応力状態

[1]

(1) 図 1(a)における応力状態を用いてモールの応力円を描け.

図 1(a)より, x - y 座標系における応力テンソルは以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ \frac{P}{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

応力テンソルからモールの応力円の中心($\sigma_c, 0$), 半径 r は以下のように求まる.

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{P}{2A} \quad (1.2)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{P}{2A} \quad (1.3)$$

以上よりモールの応力円を描くと図 1.3 となる.

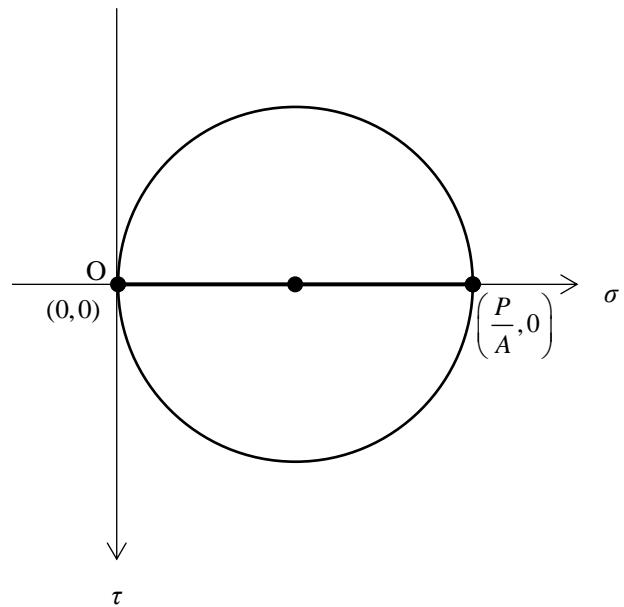


Fig. 1.3 モールの応力円

(2) 前問で描いたモールの応力円上に 45° 回転させた状態をプロットし、応力テンソルを求めよ。

軸を 45° 回転させる場合、モールの応力円上では 90° 回転させればよいので図 1.4 となる。

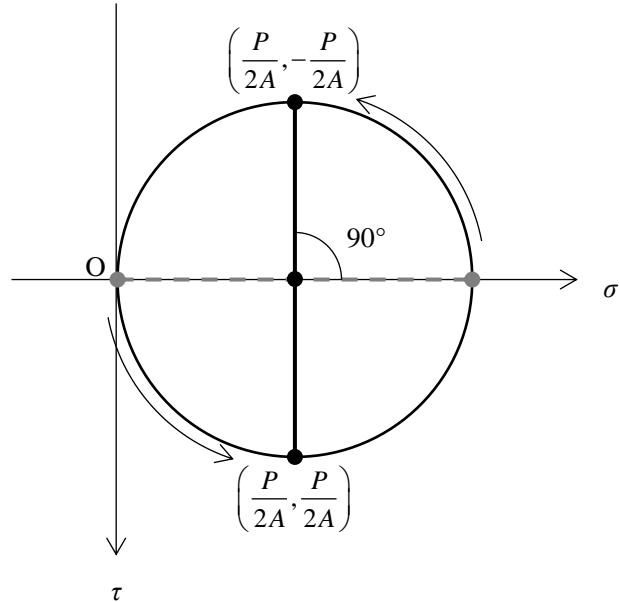


Fig. 1.4 モールの応力円

これより求める応力テンソルは以下で求まる。

$$[\sigma_{nt}] = \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P}{2A} & -\frac{P}{2A} \\ -\frac{P}{2A} & \frac{P}{2A} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

(3) 続いて図 1.2 に示される三角形における力のつり合いより 45° 回転した仮想断面上の応力状態(σ_n, τ_{nt})を求めよ.

式(1.1)の応力テンソルより図 2 は図 1.5 となる.

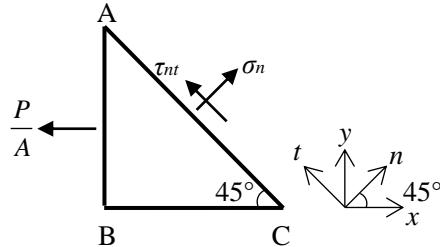


Fig. 1.5 n - t 座標系における応力状態

以下に示される x 軸及び y 軸方向における力のつり合い式を用いて 45° 回転した仮想断面上の応力状態(σ_n, τ_{nt})が求まる. また図 1.3 における矢印は応力を示しているので各辺の長さとの積を用いる. 以下では $AB=BC=h$, $AC=\sqrt{2}h$, 単位厚さとした.

x 軸方向のつり合いより

$$\begin{aligned} -\frac{P}{A} \times h - \tau_{nt} \times \sqrt{2}h \times \cos 45^\circ + \sigma_n \times \sqrt{2}h \times \cos 45^\circ &= 0 \\ \therefore -\frac{P}{A} - \tau_{nt} + \sigma_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

y 軸方向のつり合いより

$$\begin{aligned} \tau_{nt} \times \sqrt{2}h \times \sin 45^\circ + \sigma_n \times \sqrt{2}h \times \sin 45^\circ &= 0 \\ \therefore \tau_{nt} + \sigma_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\therefore \sigma_n = \frac{P}{2A}, \quad \tau_{nt} = -\frac{P}{2A} \quad (1.7)$$

以上より 45° 回転した仮想断面上の応力状態(σ_n, τ_{nt})が求まり, 式(1.4)の値と一致することが分かる.

[2] 図2は弾性体のある点における応力状態を示したものである。なお、図2(b)は図2(a)を左回りに 60° 回転した状態、図2(d)は図2(c)を右回りに 45° 回転した状態を図示したものである。このとき、以下の設問に答えよ。

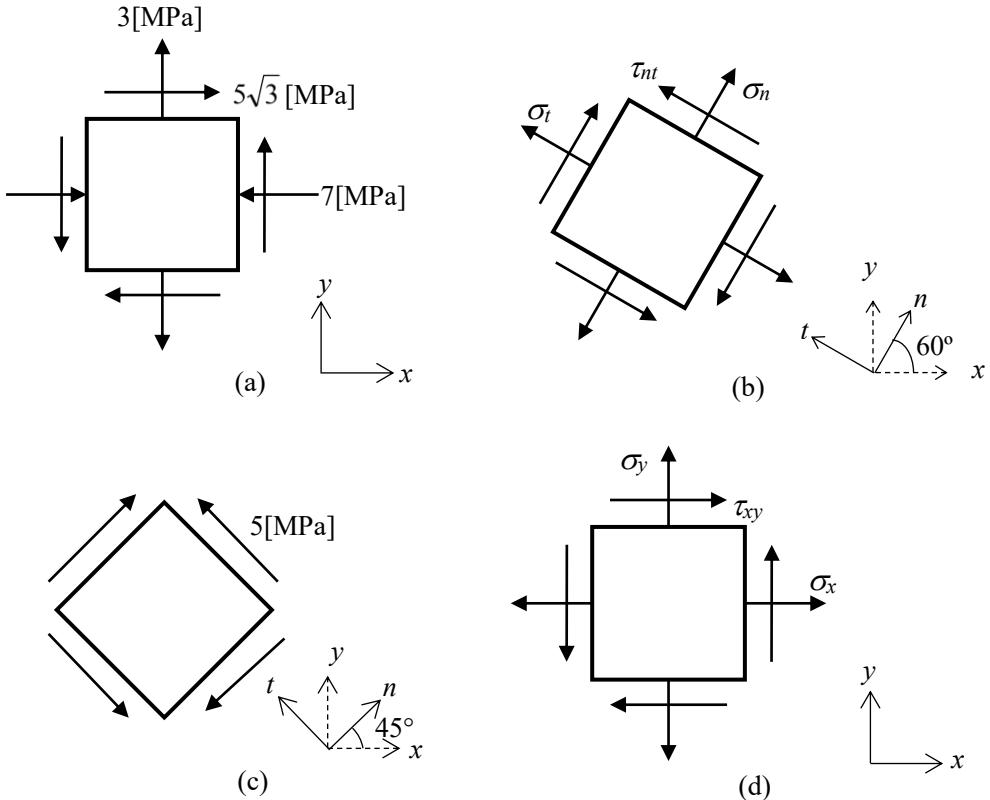


Fig. 2 弾性体のある点における応力状態。

- (1) 図2(a)のような応力状態におけるモールの応力円を描き、その中心と半径を示せ。
- (2) (1)で描いたモールの応力円から図2(b)の応力テンソル^{※1}を求めよ。
- (3) 図2(a)について座標変換を行うことで図2(b)の応力テンソルを求め、これが(2)の結果と一致することを示せ。なお必要に応じて以下の座標変換マトリックス^{※2}を用いよ。
- (4) 図2(c)のような応力状態におけるモールの応力円を描き、その中心と半径を示せ。
- (5) (4)で描いたモールの応力円から図2(d)の応力テンソル^{※1}を求めよ。
- (6) 図2(c)について座標変換を行うことで図2(d)の応力テンソルを求め、これが(5)の結果と一致することを示せ。

※1 図2(b), (d)の応力テンソル : $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{bmatrix} [\text{MPa}]$, $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} [\text{MPa}]$

※2 座標変換マトリックス : $[L] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

[2]

(1) 図 2(a)のような応力状態におけるモールの応力円を描き、その中心と半径を示せ。

図 2(a)より与えられた応力テンソルは式 (2.1) のように表される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (2.1)$$

この応力テンソルから図 2.1 のようにモールの応力円が描ける。

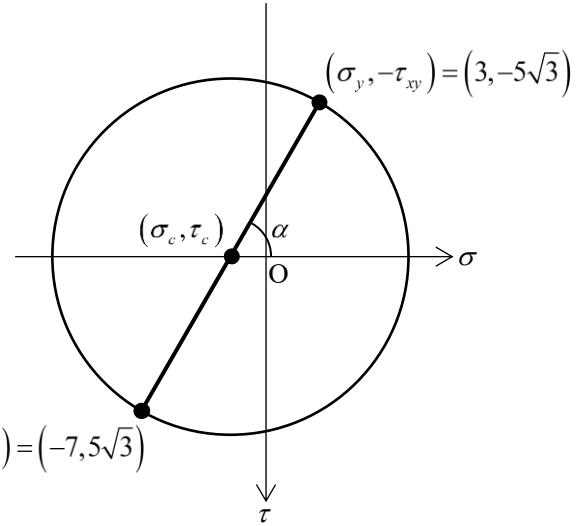


Fig.2.1 図 2(a)におけるモールの応力円。

また、応力テンソルからモールの応力円の中心 (σ_c, τ_c) と半径 r は式 (2.2), (2.3) のように算出される。

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(-7 + 3) = -2 \quad (2.2)$$

$$\text{中心: } \tau_c = \frac{1}{2}(\tau_{xy} - \tau_{yx}) = \frac{1}{2}(5\sqrt{3} - 5\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore (\sigma_c, 0) = (-2, 0) \text{ [MPa]}$$

$$\text{半径: } r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(-7 - 3)^2 + 4(5\sqrt{3})^2} = 10 \quad (2.3)$$

(2) (1)で描いたモールの応力円から図 2(b)の応力テンソルを求めよ.

n-t 座標は *x-y* 座標を反時計回りに 60° 回転させた座標であるから、モールの応力円上では反時計回りに 120° 回転 ($2\theta = 120^\circ$) させる。またモールの応力円上の α は式 (2.4) のように算出される。

$$\tan \alpha = \left| \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_c} \right| = \left| \frac{5\sqrt{3}}{-7+2} \right| = \sqrt{3} \quad \therefore \alpha = 60^\circ \quad (2.4)$$

したがって、図 2(b)のモールの応力円は図 2.2 のように描ける。

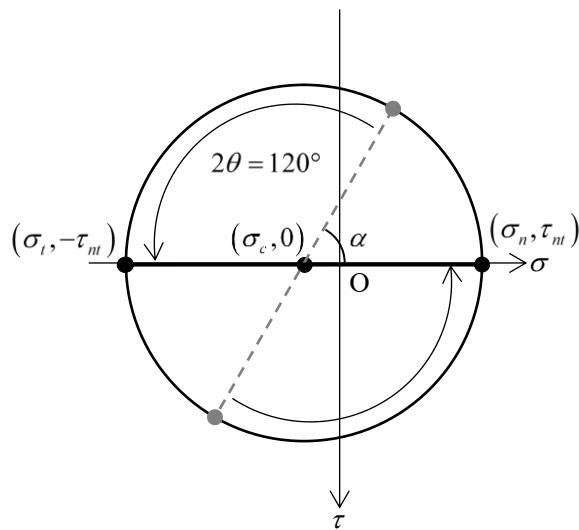


Fig.2.2 図 2(b)におけるモールの応力円。

以上より、図 2(b)の応力テンソルは式 (2.5) のように表される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad (2.5)$$

(3) 図 2(a)について座標変換を行うことで図 2(b)の応力テンソルを求め, これが(2)の結果と一致することを示せ. なお必要に応じて以下の座標変換マトリックス^{※2}を用いよ.

x - y 座標における応力テンソルを $[\sigma]$ とする. x - y 座標から θ 回転させた x' - y' 座標における応力テンソル $[\sigma']$ は座標変換マトリックスを用いて式 (2.6) のように表される.

$$[\sigma'] = [L][\sigma][L^{-1}] \quad (2.6)$$

したがって, x - y 座標から 60° 回転させた n - t 座標系における応力テンソルは式 (2.7) のように算出される.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \end{aligned} \quad (2.7)$$

(別解)

θ 傾いている任意の断面に作用する応力 T_n の x 軸方向および y 軸方向の成分について考える. x 軸方向および y 軸方向の応力成分をそれぞれ T_{ny} , T_{nx} とすると, 式 (2.8) のように表される.

$$\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ T_{ny} &= \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

式 (2.8) をマトリックス表示すると, 式 (2.9) のようになる.

$$\begin{Bmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

一方, T_{nc} , T_{ny} は斜面に働く応力成分 σ_n , σ_t , τ_{nt} は式 (2.10) のように, マトリックス表示

できる。

$$\begin{Bmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

図 2.2 より, σ_n, σ_t は主応力であるため, 主応力を σ_p とすると式 (2.11) が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 \\ 0 & \sigma_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

また図 2 より, $\theta=60^\circ$ である。式 (2.11) が成立するためには, 行列の解が 0 である必要があるため, 式 (2.12) のような行列式が成立する必要がある。

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_p \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

式 (2.12) を展開すると, に関する二次方程式になるため, それを解くと, 式 (2.13) のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 - (\sigma_x + \sigma_y) + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) &= 0 \\ \sigma_p^2 - (-7 + 3)\sigma_p + (-7 \cdot 3 - (5\sqrt{3})^2) &= 0 \\ (\sigma_p + 12)(\sigma_p - 8) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\therefore \sigma_p = -12, 8 \text{ [MPa]}$$

式(2.13), 図 2.2 より $\sigma_n > 0$ であるため, よって $n-t$ 座標系における応力テンソルは式(2.7) で算出されたものと一致する。また, σ_n, σ_t は主応力であるため, $\tau_{nt} = 0$ である。

(4) 図 2(c)のような応力状態におけるモールの応力円を描き、その中心と半径を示せ。

図 2(c)より与えられた応力テンソルは式 (2.14) のように表される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_m & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (2.14)$$

この応力テンソルから、図 2.3 のようなモールの応力円が描ける。

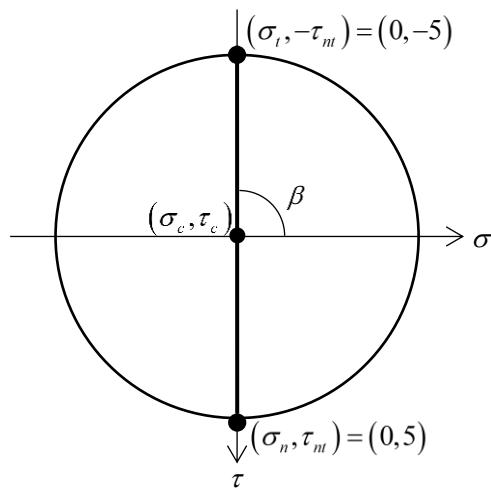


Fig.2.3 図 2(c)におけるモールの応力円。

また、応力テンソルからモールの応力円の中心 (σ_c, τ_c) と半径 r は式 (2.15), (2.16) のように算出される。

$$\begin{aligned} \sigma_c &= 0 \\ \text{中心} : \tau_c &= \frac{1}{2}(\tau_{xy} - \tau_{yx}) = 0 \\ \therefore (\sigma_c, \tau_c) &= (0, 0) \text{ [MPa]} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\text{半径} : r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_n - \sigma_t)^2 + 4\tau_{nt}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 5^2} = 5 \quad (2.16)$$

また、 $\beta = 90^\circ$ であることは図 2.3 より明らかである。

(5) (4)で描いたモールの応力円から図 2(d)の応力テンソルを求めよ.

$x-y$ 座標は $n-t$ 座標を時計回りに 45° 回転させた座標であるから、モールの応力円上では時計回りに 90° 回転させる。したがって図 2(d)のモールの応力円は図 2.4 のように描ける

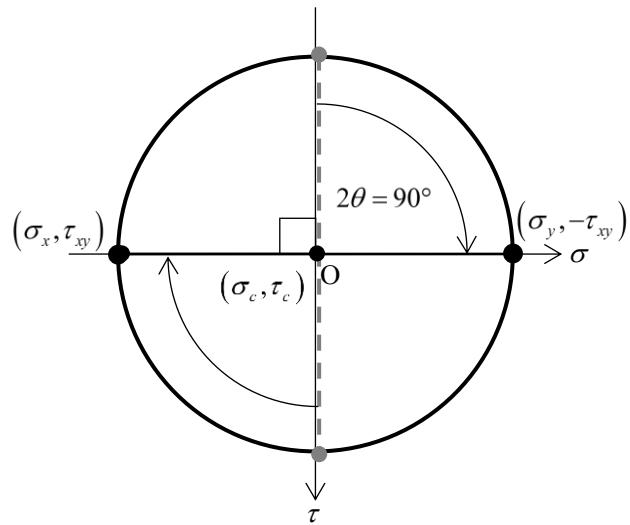


Fig.2.4 図 2(d)におけるモールの応力円.

以上より、図 2(d)の応力テンソルは式 (2.17) のように表される.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} \quad (2.17)$$

(6) 図 2(c)について座標変換を行うことで図 2(d)の応力テンソルを求め, これが(5)の結果と一致することを示せ.

式 (2.6) より, $n-t$ 座標から 45° 回転させた $x-y$ 座標系における応力テンソルは式 (2.18) のように算出される.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & \sin(-45^\circ) \\ -\sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_m & \sigma_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} [\text{MPa}]
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

(別解)

図 2.4 より σ_x, σ_y は主応力であるため, 主応力を σ_p とすると式 (2.19) が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_m & \sigma_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 \\ 0 & \sigma_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) \end{Bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \sigma_n - \sigma_p & \tau_{nt} \\ \tau_m & \sigma_t - \sigma_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) \end{Bmatrix} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

また図 2 より, $\theta=45^\circ$ である. 式 (2.19) が成立するためには, 行列の解が 0 である必要があるため, 式 (2.20) のような行列式が成立する必要がある.

$$\begin{vmatrix} \sigma_n - \sigma_p & \tau_{nt} \\ \tau_m & \sigma_t - \sigma_p \end{vmatrix} = 0 \tag{2.20}$$

式 (2.20) を展開すると, σ_p に関する二次方程式になるため, それを解くと, 式 (2.21) のようになる.

$$\sigma_p^2 - (\sigma_n + \sigma_t) + (\sigma_n \sigma_t - \tau_{nt}^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 - 5^2 &= 0 \\ (\sigma_p + 5)(\sigma_p - 5) &= 0 \\ \therefore \sigma_p &= \pm 5 \text{ [MPa]} \end{aligned} \tag{2.21}$$

式 (2.21), 図 2.4 より $\sigma_y > 0$ であるため, よって x - y 座標系における応力テンソルは式 (2.18) と一致する. また, σ_x , σ_y は主応力であるため, $\tau_{xy} = 0$ である.