

## 材料の力学 1 Step1 第2回演習問題(2018/4/24 実施)

- [1] 図 1(a)のように長さ  $2L$ ，断面積  $A$  の部材が点  $O$  において壁に固定されており，部材の  $OA$  間  $L \leq x \leq 2L$  に分布荷重  $p$  が  $x$  軸方向に一様に作用しているとする．図 1(a)においては点  $B$  で拘束されていないが，図 1(b)において点  $O'$ ， $B'$ において壁に固定されている．棒のヤング率を  $E$  として以下の問いに答えよ．ただし，壁は変形しない．

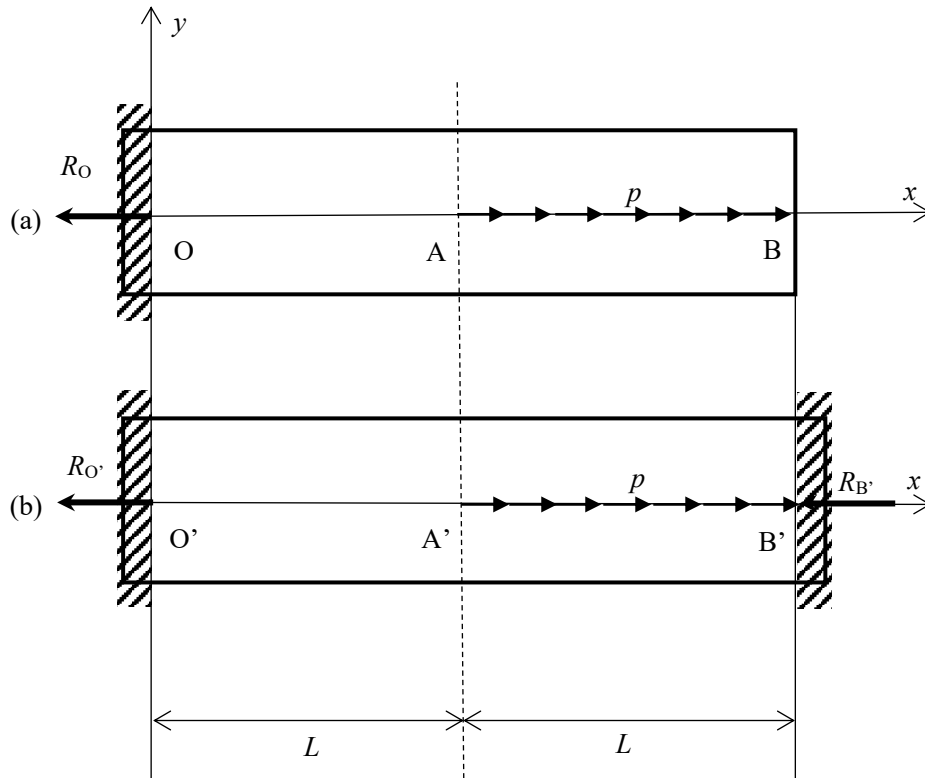


Fig.1 片端固定及び両端固定され分布荷重  $p$  が働く棒.

図 1(a)について，

- (1) 点  $O$  での壁からの反力を  $R_O$  として FBD を描き， $R_O$  を求めよ．
- (2) 部材に作用している垂直応力  $\sigma(x)$  の  $x$  方向変化を図示せよ．（必ず FBD を書くこと）
- (3) 点  $B$  の変位  $\delta_B$  を求めよ．

図 1(b)について

- (4) 点  $O'$ ， $B'$  における壁からの反力をそれぞれ  $R_{O'}$ ， $R_{B'}$  として FBD を描け．
- (5) 点  $B'$  の変位  $\delta_{B'}=0$  となることから，壁からの反力  $R_{O'}$ ， $R_{B'}$  を求めよ．（必ず FBD を書くこと）
- (6) 部材に作用している垂直応力  $\sigma'(x)$  の  $x$  方向変化を図示せよ．

[1]

(1) 部材に働く力を明確にするために、壁からの反力を  $R_0$  として FBD を考えると図 1.1 のようになる.

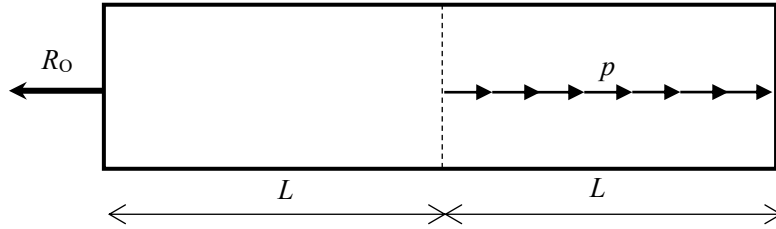


Fig.1.1 FBD(a).

ここで、力のつり合いより

$$\begin{aligned} -R_0 + pL &= 0 \\ R_0 &= pL \end{aligned} \quad (1.1)$$

したがって、壁からの反力  $R_0$  は左向きに  $pL$  となる.

(2) まず、部材に働く軸力  $N(x)$  を求めるため、壁からの距離  $x$  における断面を考える.

(i)  $0 \leq x < L$  のとき

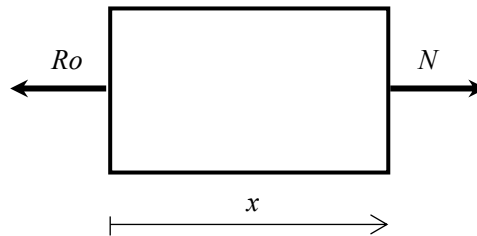


Fig.1.2 FBD( $0 \leq x < L$ ).

図 1.2 より軸力  $N(x)$  は以下のように求められる.

$$\begin{aligned} -pL + N(x) &= 0 \\ N(x) &= pL \end{aligned} \quad (1.2)$$

よって応力  $\sigma(x)$  は

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{N(x)}{A} \\ \sigma(x) &= \frac{pL}{A} \end{aligned} \quad (1.3)$$

と求められる.

(ii)  $L \leq x \leq 2L$  のとき

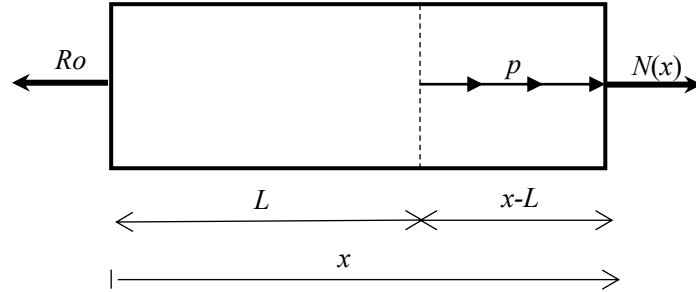


Fig.1.3 FBD( $L \leq x \leq 2L$ ).

図 1.3 より軸力  $N(x)$  は以下のように求められる.

$$-pL + p(x-L) + N(x) = 0$$

$$N(x) = -px + 2pL \quad (1.4)$$

よって応力  $\sigma(x)$  は

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A}$$

$$\sigma(x) = \frac{-px + 2pL}{A} \quad (1.5)$$

式(1.3), 式(1.5)より, 垂直応力  $\sigma(x)$  の  $x$  方向変化は次のように表される.

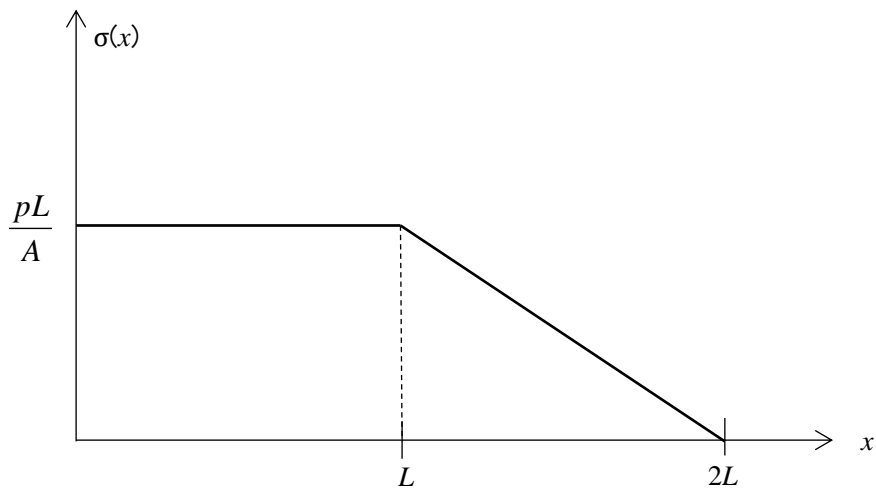


Fig.1.4  $\sigma(x)$  の  $x$  方向変化.

(3) 壁からの距離  $x$  におけるひずみ  $\varepsilon(x)$ は

(i)  $0 \leq x < L$  のとき

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{pL}{EA} \quad (1.6)$$

(ii)  $L \leq x \leq 2L$  のとき

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{-px + 2pL}{EA} \quad (1.7)$$

よって点 B での変位  $\delta_B$  は, OA 間の変位  $\delta_{OA}$  と AB 間の変位  $\delta_{AB}$  の和となるので

$$\begin{aligned} \delta_B &= \delta_{OA} + \delta_{AB} \\ \delta_B &= \int_0^L \frac{pL}{EA} dx + \int_L^{2L} \frac{1}{EA} (-px + 2pL) dx \\ &= \frac{3pL^2}{2EA} \end{aligned} \quad (1.8)$$

(4) 部材は固定端で挟まれているため, 両側の壁から反力を受ける. よって FBD は図 1.5 のようになる.

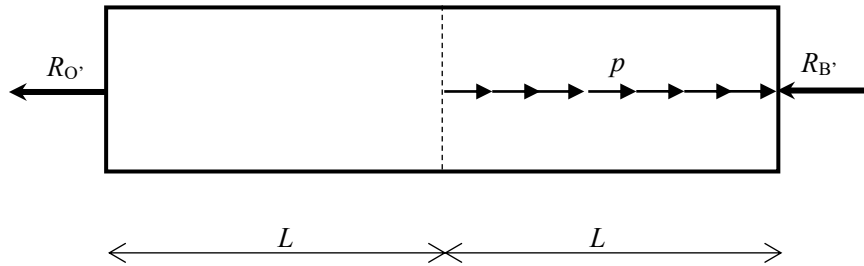


Fig.1.5 FBD(b).

(5) まず, 部材に働く軸力  $N(x)$ を求めるため, 点 O からの距離  $x$  における断面を考える.

(i)  $0 \leq x < L$  のとき

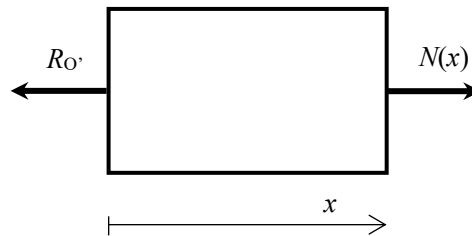


Fig.1.6 FBD( $0 \leq x < L$ ).

力のつり合いより

$$-R_O + N(x) = 0$$

$$N(x) = R_O \quad (1.9)$$

(ii)  $L \leq x \leq 2L$  のとき

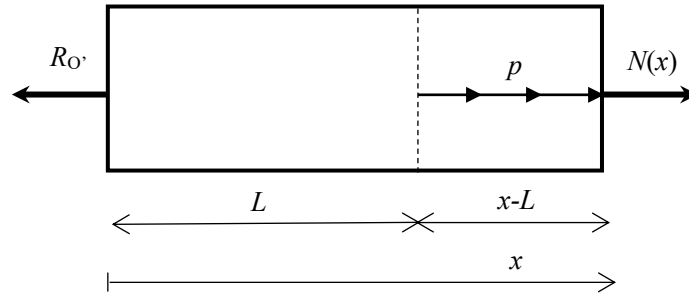


Fig.1.7 FBD( $L \leq x \leq 2L$ ).

力のつり合いより

$$-R_O + p(x-L) + N(x) = 0$$

$$N(x) = R_O - p(x-L) \quad (1.10)$$

次に、部材 O'A'間、部材 A'B'間それぞれの変位を求める。

$$\begin{aligned} \delta_{O'A'} &= \int_0^L \varepsilon(x) dx = \int_0^L \frac{N(x)}{EA} dx \\ &= \frac{R_O L}{EA} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \delta_{A'B'} &= \int_L^{2L} \varepsilon(x) dx = \frac{1}{EA} \int_L^{2L} \{R_O - p(x-L)\} dx \\ &= \frac{1}{EA} \left( R_O L - \frac{1}{2} p L^2 \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

点 B'の変位は O'A'間の変位と A'B'間の変位の和となるので、

$$\begin{aligned} \delta_{B'} &= \delta_{O'A'} + \delta_{A'B'} \\ &= \frac{1}{EA} \left( 2R_O L - \frac{1}{2} p L^2 \right) \end{aligned}$$

点 O', B' は固定端であるため  $\delta_{B'}=0$  となる． よって

$$\frac{1}{EA} \left( 2R_{O'}L - \frac{1}{2}pL^2 \right) = 0$$

$$R_{O'} = \frac{1}{4}pL \quad (1.13)$$

ここで，図 1.5 の FBD において力のつり合いより

$$-R_{O'} + pL - R_{B'} = 0 \quad (1.14)$$

が成り立つ．式(1.13)を式(1.14)に代入すると，

$$-\frac{1}{4}pL + pL - R_{B'} = 0$$

$$R_{B'} = \frac{3}{4}pL \quad (1.15)$$

となる．

(6)  $R_{O'}$  を式(1.9)，式(1.10)に代入し，軸力  $N(x)$  を求め，垂直応力  $\sigma'(x)$  を求める．

(i)  $0 \leq x < L$  のとき

$$\sigma'(x) = \frac{pL}{4A} \quad (1.16)$$

(ii)  $L \leq x \leq 2L$  のとき

$$\sigma'(x) = \frac{-4px + 5pL}{4A} \quad (1.17)$$

以上より垂直応力  $\sigma'(x)$  の  $x$  方向変化は図 1.7 のようになる．

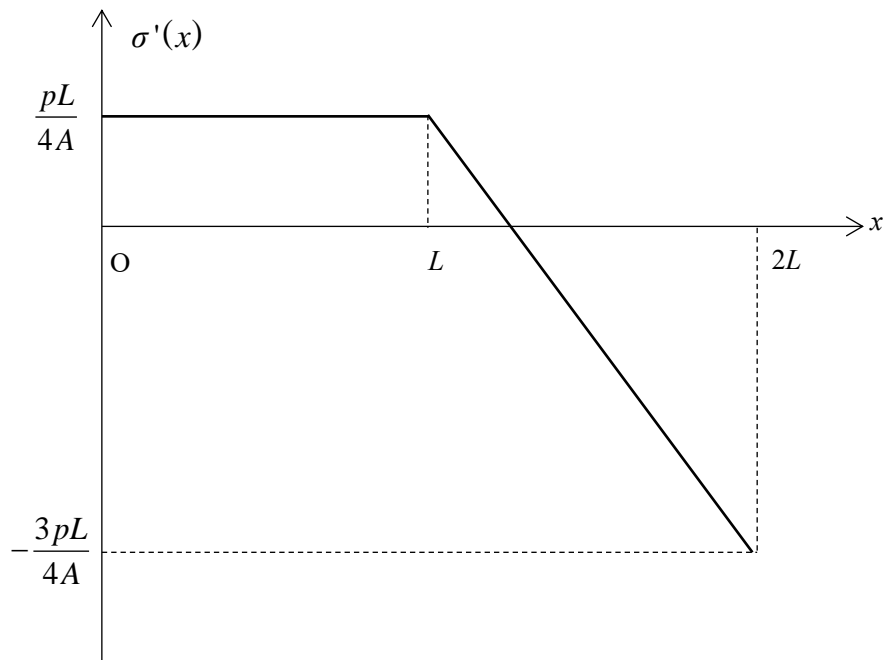


Fig.1.7  $\sigma'(x)$ の  $x$  方向変化.

[2] 直径  $d_1$  の丸棒と、直径  $d_2$ 、厚さ  $t$  ( $d_2 \gg t$ ) の薄肉円筒が図 2 のように左端で壁に固定されている。丸棒には分布荷重  $p$  が作用している。丸棒と円筒は並列に結合しており、右端で剛体を介して外力  $P$  が作用している。剛体は上下面を支持されていて、回転しないで平行にのみ移動することができる。丸棒と円筒のヤング率は  $E$  とする。

丸棒と円筒が壁から受ける反力をそれぞれ  $R_1$ ,  $R_2$  として、以下の設問に解答せよ。ただし、円筒が壁から受ける反力  $R_2$  は断面の図心を通る集中荷重と考えることとする。(図では便宜上 2 ヶ所に反力が書かれている)。

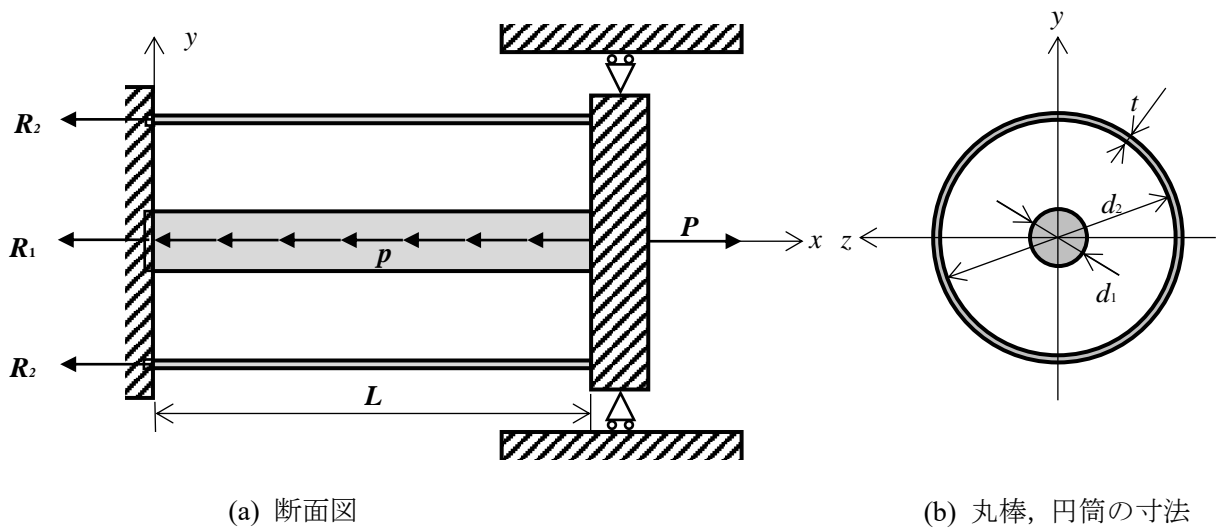


Fig.2 丸棒部材と円筒部材

- (1) 丸棒と円筒の断面積  $S_1$ ,  $S_2$  をそれぞれ求めよ。(  $t$  が  $d_2$  よりもはるかに小さいため、薄肉円筒の直径は常に  $d_2$  で一定であるとみなせる)
- (2) 外力  $P$  と反力  $R_1$ ,  $R_2$  のつり合い式を示せ。ただし、 $R_1$ ,  $R_2$  は図の矢印の向きを正とする。
- (3) 丸棒、円筒に作用する軸力  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  を、 $R_1$ ,  $R_2$  を用いて示せ。(必ず FBD を書くこと)
- (4) 丸棒、円筒に作用する垂直応力  $\sigma_1(x)$ ,  $\sigma_2(x)$  を、 $R_1$ ,  $R_2$  を用いて示せ。
- (5) 丸棒、円筒に生じるひずみ  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$  を、 $R_1$ ,  $R_2$  を用いて示せ。
- (6) 丸棒と円筒の変位が等しい条件 ( $\delta_1 = \delta_2$ ) と、(2) で求めたつり合い式を用いて、反力  $R_1$ ,  $R_2$  を求めよ。ただし、 $d_1 = d_2/5$ ,  $t = d_2/100$  とする。



[2] (1) 丸棒と円筒の断面積  $S_1$ ,  $S_2$  をそれぞれ求めよ.

丸棒の断面積  $S_1$  は半径  $d_1/2$  より

$$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \quad (2.1)$$

円筒の断面積  $S_2$  は  $t$  が  $d_2$  よりもはるかに小さいため, 直径は薄肉円筒で常に  $d_2$  で一定であるとみなして

$$S_2 = \pi d_2 t \quad (2.2)$$

---

(補足)

直径  $d_2$  と直径  $d_2 + 2t$  の円の断面積の差で薄肉円筒の断面積を求めた場合

$$\begin{aligned} S_2 &= \pi \left( \frac{d_2}{2} + t \right)^2 - \pi \left( \frac{d_2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\pi d_2^2}{4} + \pi d_2 t + \pi t^2 - \frac{\pi d_2^2}{4} \\ &= \pi d_2 t + \pi t^2 \end{aligned} \quad (a)$$

ここで,  $d_2 \gg t$  より  $t$  の 2 乗の項を無視して

$$S_2 = \pi d_2 t \quad (b)$$

と求まる.

---

(2) 外力  $P$  と反力  $R_1$ ,  $R_2$  のつり合い式を示せ. ただし,  $R_1$ ,  $R_2$  は図の矢印の向きを正とする

全体にはたらく力のつり合いより

$$\begin{aligned} P - R_1 - R_2 - pL &= 0 \\ \therefore R_1 + R_2 + pL &= P \end{aligned} \quad (2.3)$$

(3) 丸棒, 円筒に作用する軸力  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  を,  $R_1$ ,  $R_2$  を用いて示せ.

$0 \leq x \leq L$  の範囲での仮想断面における力のつり合いを考え, 軸力  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  を求める.

(i) 丸棒について

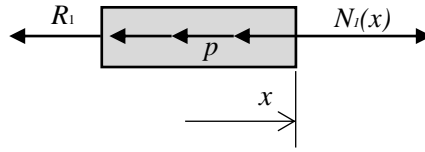


Fig.2.1 丸棒の FBD

FBD は図 2.1 のようになり，力のつり合いより

$$\begin{aligned} N_1(x) - R_1 - px &= 0 \\ \therefore N_1(x) &= R_1 + px \end{aligned} \quad (2.4)$$

(ii) 円筒について

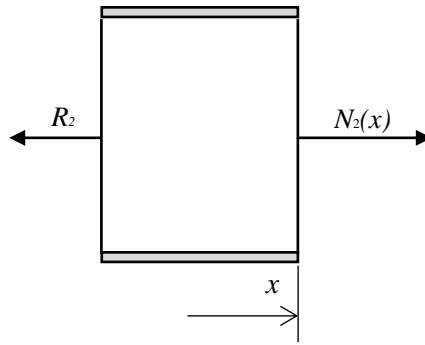


Fig.2.2 円筒の FBD

FBD は図 2.2 のようになり，力のつり合いより

$$\begin{aligned} N_2(x) - R_2 &= 0 \\ \therefore N_2(x) &= R_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

(4) 丸棒，円筒に作用する垂直応力  $\sigma_1(x)$ ， $\sigma_2(x)$  を， $R_1$ ， $R_2$  を用いて示せ．

(i) 丸棒の断面積は(1)で求めた値を用いて  $\sigma_1(x)$  は

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \frac{N_1(x)}{S_1} = \frac{R_1 + px}{\pi \left( \frac{d_1}{2} \right)^2} \\ &= \frac{4(R_1 + px)}{\pi d_1^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

(ii) 円筒の断面積は(1)で求めた値を用いて $\sigma_2(x)$ は

$$\sigma_2(x) = \frac{N_2(x)}{S_2} = \frac{R_2}{\pi d_2 t} \quad (2.7)$$

と求まる.

(5) 丸棒, 円筒に生じるひずみ $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_2(x)$ を,  $R_1$ ,  $R_2$  を用いて示せ.

(i) 丸棒に生じるひずみ $\varepsilon_1(x)$ は応力 $\sigma_1(x)$ を用いて

$$\varepsilon_1(x) = \frac{\sigma_1(x)}{E} = \frac{4(R_1 + px)}{\pi E d_1^2} \quad (2.8)$$

(ii) 円筒に生じるひずみ $\varepsilon_2(x)$ は応力 $\sigma_2(x)$ を用いて

$$\varepsilon_2(x) = \frac{\sigma_2(x)}{S_2} = \frac{R_2}{\pi E d_2 t} \quad (2.9)$$

と求まる.

(6) 丸棒と円筒の変位が等しい条件 ( $\delta_1 = \delta_2$ ) と, (2) で求めたつり合い式を用いて, 反力  $R_1$ ,  $R_2$  を求めよ. ただし,  $d_1 = d_2/5$ ,  $t = d_2/100$  とする.

まず, 丸棒と円筒に生じる変位 $\delta_1$ ,  $\delta_2$ をそれぞれ求めると

(i) 丸棒について

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^L \varepsilon_1(x) dx = \frac{4}{\pi E d_1^2} \int_0^L (R_1 + px) dx \\ &= \frac{4}{\pi E d_1^2} \left( R_1 L + \frac{1}{2} p L^2 \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

(ii) 円筒について

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^L \varepsilon_2(x) dx = \frac{1}{\pi E d_2 t} \int_0^L R_2 dx \\ &= \frac{R_2 L}{\pi E d_2 t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

と求まり， $\delta_1=\delta_2$  より

$$\frac{4}{\pi E d_1^2} \left( R_1 L + \frac{1}{2} p L^2 \right) = \frac{R_2 L}{\pi E d_2 t} \quad (2.12)$$

となる．ここで  $d_1 = \frac{d_2}{5}$ ，  $t = \frac{d_2}{100}$  という条件を用いて式(2.12)に代入すると

$$\frac{4}{\pi E \left( \frac{d_2}{5} \right)^2} \left( R_1 L + \frac{1}{2} p L^2 \right) = \frac{R_2 L}{\pi E d_2 \left( \frac{d_2}{100} \right)} \quad (2.13)$$

これを整理して

$$R_1 - R_2 + \frac{1}{2} p L = 0 \quad (2.14)$$

式(2.3)と(2.14)より  $R_1$ ，  $R_2$  は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{4} (2P - 3pL) \\ R_2 &= \frac{1}{4} (2P - pL) \end{aligned} \quad (2.15)$$

以上のように力のつり合いと変位の拘束条件の連立方程式を解くことにより未知反力  $R_1$ ，  $R_2$  が得られた．