※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却．

材料の力学 1　Step3　第 12 回演習問題（2017/7/18 実施）

[1] 図 1(a)に示すような両端に分布荷重がかかるはりのたわみ解析を，その対称性を利用し図 1(b)のようなはりのたわみ解析として行うことを考える．OA 間には分布荷重 f_o が作用している．このとき以下の問いに答えよ．ただしはりの曲げ剛性は EI とする．

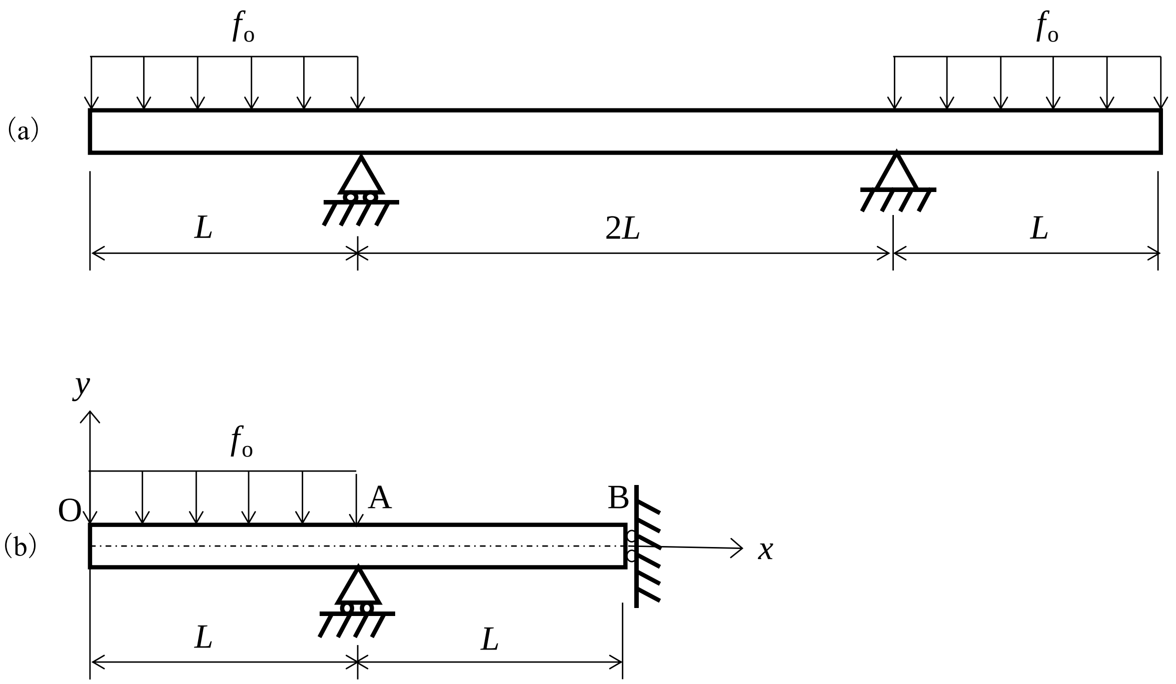

Fig. 1 両端に分布荷重を受けるはり

(1) 点 A の支点反力を R_A．点 B の壁からの反モーメントを M_B とし，はり全体の FBD を描け．また，力のつり合い，モーメントのつり合いから R_A と M_B を求めよ．
(2) $M(x)$を特異関数表示せよ．
(3) 点 B のたわみ v_B を求めよ．

次に，図 1(b)のはりに関し点Bに y 方向の荷重 P を与え，$v_B = 0$ となるようにする．
(4) 荷重 P，点 O のたわみ v_O を求めよ．

[1]

(1)点 A の支点反力を $\boldsymbol{R}_{\mathbf{A}}$．点 B の壁からの反モーメントを $\boldsymbol{M}_{\mathbf{B}}$ とし，はり全体の FBD を描け．また，力のつり合い，モーメントのつり合いから $\boldsymbol{R}_{\mathbf{A}}$ と $\boldsymbol{M}_{\mathbf{B}}$ を求めよ．

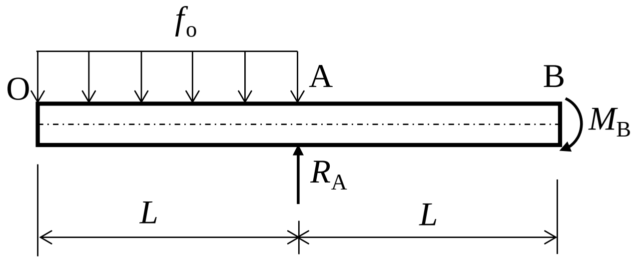

Fig. 1.1 はり全体の FBD

FBD は図 1.1 のようになる．よって力ならびに A 点まわりのモーメントのつり合いより

$$\begin{cases} R_A - f_0 L = 0 \\ \dfrac{1}{2} f_0 L^2 - M_B = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\therefore R_A = f_0 L, \qquad M_B = \frac{1}{2} f_0 L^2 \tag{1.2}$$

(2) $\boldsymbol{M(x)}$を特異関数表示せよ．

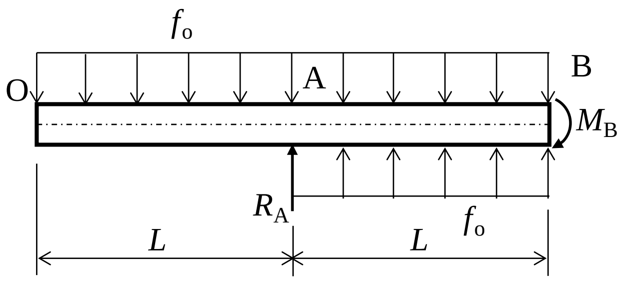

Fig. 1.2 はり全体の FBD

図 1.2 より，$L \le x \le 2L$ でははりに逆向き同じ大きさの分布荷重が作用していると考え, $M(x)$ を特異関数表示すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{1}{2} f_0 \langle x \rangle^2 - R_A \langle x - L \rangle - \frac{1}{2} f_0 \langle x - L \rangle^2 \\ &= \frac{1}{2} f_0 \langle x \rangle^2 - f_0 L \langle x - L \rangle - \frac{1}{2} f_0 \langle x - L \rangle^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

(3) 点 B のたわみ v_B を求めよ．

式(1.3)をたわみの基礎式に代入すると

$$-EIv'' = \frac{1}{2} f_0 \langle x \rangle^2 - f_0 L \langle x - L \rangle - \frac{1}{2} f_0 \langle x - L \rangle^2 \tag{1.4}$$

式(4)の両辺を積分して

$$-EIv' = \frac{1}{6} f_0 \langle x \rangle^3 - \frac{f_0 L}{2} \langle x - L \rangle^2 - \frac{1}{6} f_0 \langle x - L \rangle^3 + C_1 \tag{1.5}$$

$$-EIv = \frac{1}{24} f_0 \langle x \rangle^4 - \frac{f_0 L}{6} \langle x - L \rangle^3 - \frac{1}{24} f_0 \langle x - L \rangle^4 + C_1 x + C_2 \tag{1.6}$$

ここで，境界条件 $v(L) = 0$，$v'(2L) = 0$ より

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{24} f_0 L^4 + C_1 L + C_2 \\ 0 = \dfrac{4}{3} f_0 L^3 - \dfrac{1}{2} f_0 L^3 - \dfrac{1}{6} f_0 L^3 + C_1 \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\therefore C_1 = -\frac{2}{3} f_0 L^3, \qquad C_2 = \frac{5}{8} f_0 L^4 \tag{1.8}$$

よって式(1.6)および式(1.8)より

$$v = -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{24} f_0 \langle x \rangle^4 - \frac{f_0 L}{6} \langle x - L \rangle^3 - \frac{1}{24} f_0 \langle x - L \rangle^4 - \frac{2}{3} f_0 L^3 x + \frac{5}{8} f_0 L^4 \right\} \tag{1.9}$$

式(1.9)より，

$$v_B = v|_{x=2L} = -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{24} f_0 (2L)^4 - \frac{f_0 L}{6} (L)^3 - \frac{1}{24} f_0 (L)^4 - \frac{2}{3} f_0 L^3 (2L) + \frac{5}{8} f_0 L^4 \right\}$$

$$= \frac{f_0 L^4}{4EI} \tag{1.10}$$

(4) 荷重 *P*，点 O のたわみ v_O を求めよ．

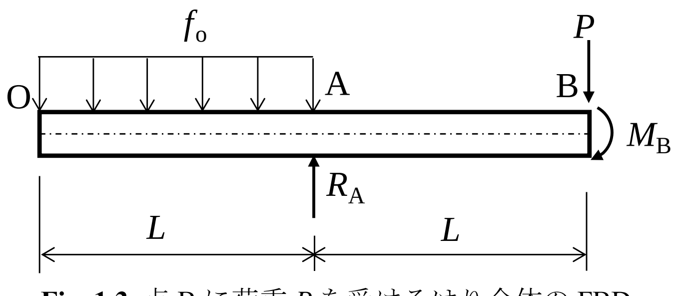

Fig. 1.3 点 B に荷重 *P* を受けるはり全体の FBD

力のつり合いならびに A 点まわりのモーメントのつり合いより

$$\begin{cases} R_{\mathrm{A}} - f_0 L - P = 0 \\ \dfrac{1}{2} f_0 L^2 - M_{\mathrm{B}} - PL = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

式(1.11)から R_{A} は一意に定まらないため，$M(x)$を特異関数表示すると式(1.3)の中辺のように表せる．これをたわみの基礎式に代入すると

$$-EIv'' = \frac{1}{2} f_0 \langle x \rangle^2 - R_{\mathrm{A}} \langle x - L \rangle - \frac{1}{2} f_0 \langle x - L \rangle^2 \tag{1.12}$$

両辺を積分すると

$$-EIv' = \frac{1}{6} f_0 \langle x \rangle^3 - \frac{R_{\mathrm{A}}}{2} \langle x - L \rangle^2 - \frac{1}{6} f_0 \langle x - L \rangle^3 + C_1 \tag{1.13}$$

$$-EIv = \frac{1}{24} f_0 \langle x \rangle^4 - \frac{R_{\mathrm{A}}}{6} \langle x - L \rangle^3 - \frac{1}{24} f_0 \langle x - L \rangle^4 + C_1 x + C_2 \tag{1.14}$$

ここで，境界条件 $v(L) = 0$， $v(2L) = v'(2L) = 0$ より

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{24} f_0 L^4 + C_1 L + C_2 \\ 0 = \dfrac{2}{3} f_0 L^4 - \dfrac{R_{\mathrm{A}}}{6} L^3 - \dfrac{1}{24} f_0 L^4 + 2C_1 L + C_2 \\ 0 = \dfrac{4}{3} f L^3 - \dfrac{R_{\mathrm{A}}}{2} L^2 - \dfrac{1}{6} f_0 L^3 + C_1 \end{cases} \tag{1.15}$$

$$\therefore R_{\mathrm{A}} = \frac{7}{4} f_0 L, \qquad C_1 = -\frac{7}{24} f_0 L^3, \qquad C_2 = \frac{1}{4} f_0 L^4 \tag{1.16}$$

よって式(1.11)ならびに式(1.16)より

$$\begin{aligned} P &= R_{\mathrm{A}} - f_0 L \\ &= \frac{3}{4} f_0 L \end{aligned} \tag{1.17}$$

また，式(1.14)ならびに式(1.16)より

$$v = -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{24} f_0 \langle x \rangle^4 - \frac{7 f_0 L}{24} \langle x - L \rangle^3 - \frac{1}{24} f_0 \langle x - L \rangle^4 - \frac{7}{24} f_0 L^3 x + \frac{1}{4} f_0 L^4 \right\} \tag{1.18}$$

式(1.19)より

$$v_{\mathrm{O}} = v\big|_{x=0} = -\frac{f_0 L^4}{4EI} \tag{1.19}$$

~別解~

(4) 分布荷重 f_0 によるたわみと荷重 P のたわみの重ね合わせとして考える．点 B に荷重 P が作用した場合，力のつり合いより支点 A には支点反力 P が図 1.4 のように生じる．

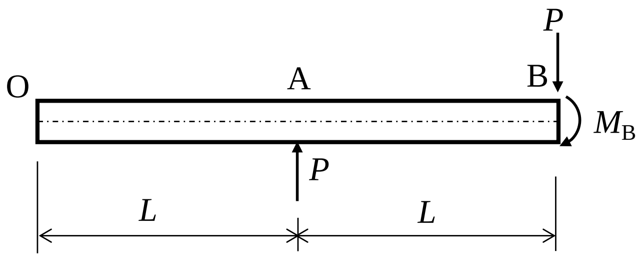

Fig. 1.4 荷重 P のみを受けるはりの FBD

図 1.4 において，点 B のたわみ角は 0 なので点 B を固定支点と考えると，点 B を基準とした点 A の相対的なたわみ v_{BA} ならびにたわみ角 v'_{BA} は

$$v_{\mathrm{BA}} = \frac{PL^3}{3EI} \tag{1.20}$$

$$v'_{\mathrm{BA}} = -\frac{PL^3}{2EI} \tag{1.21}$$

ここで条件より v_{BA} は(3)で導出した v_{B} に等しいことから，式(1.10)ならびに式(1.20)より

$$\frac{PL^{3^3}}{3EI} = \frac{f_0 L^4}{4EI} \tag{1.22}$$

$$\therefore P = \frac{3}{4} f_0 L \tag{1.23}$$

また，荷重 P による点 O のたわみ v_{O1} は，点 A のたわみが 0 であるので，式(1.21)ならびにより式(1.23)より

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{O1}} &= v'_{\mathrm{BA}}(0-L) \\ &= \left(-\frac{L^3}{2EI}\right)\left(\frac{3}{4} f_0 L\right)(-L) \\ &= \frac{3 f_0 L^4}{8EI} \end{aligned} \tag{1.24}$$

さらに，分布荷重 f_0 による点 O のたわみ v_{O2} は式(1.9)より

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{O2}} = v\big|_{x=0} &= -\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{24} f_0 (0)^4 - \frac{f_0 L}{6}(0)^3 - \frac{1}{24} f_0 (0)^4 - \frac{2}{3} f_0 L^3 (0) + \frac{5}{8} f_0 L^4\right\} \\ &= -\frac{5 f_0 L^4}{8EI} \end{aligned} \tag{1.25}$$

よって求める v_{O} は式(1.24)ならびに式(1.25)より

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{O}} &= v_{\mathrm{O1}} + v_{\mathrm{O2}} \\ &= -\frac{f_0 L^4}{4EI} \end{aligned} \tag{1.26}$$

[2] 図 2（a）に示すように A 点において長さ L の剛体棒による偶力が作用し，B 点で単純支持されているはりを考える．なお，はりの曲げ剛性は EI とする．このとき，以下の設問に答えよ．

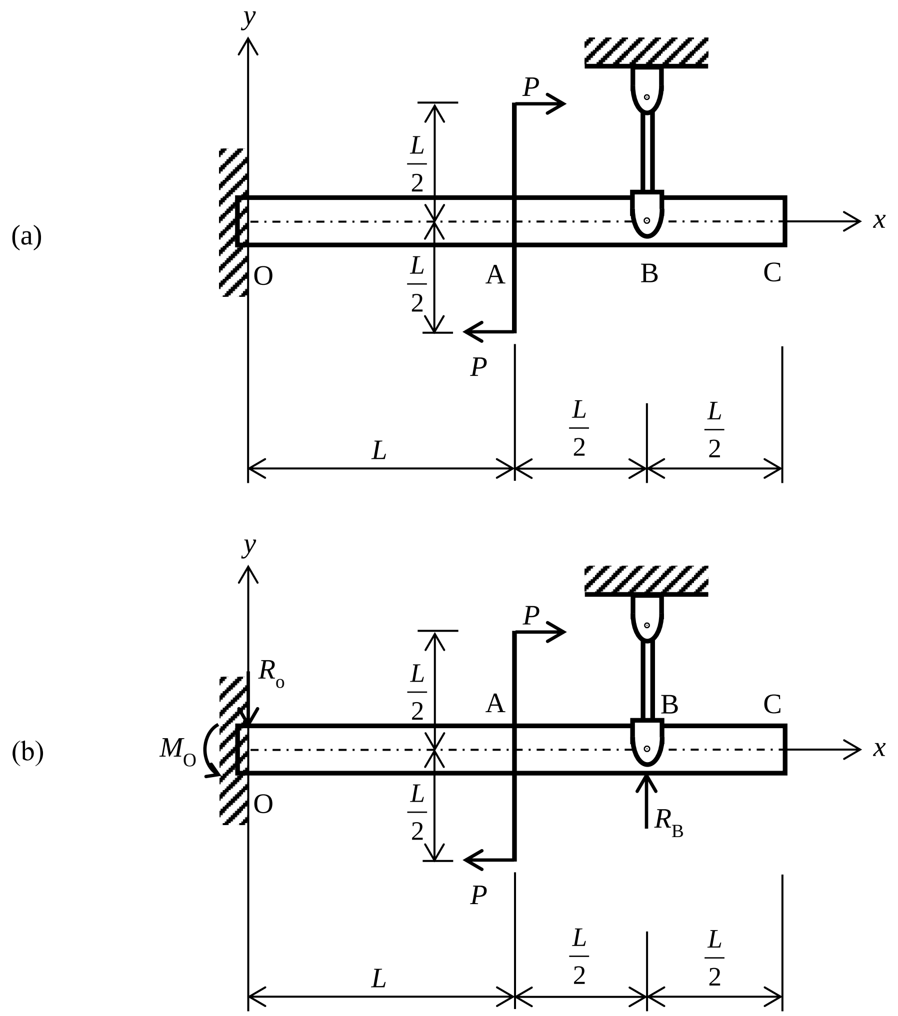

Fig.2 壁と天井に固定されたはり

O 点における反力 R_O と反モーメント M_O，B 点における反力 R_B を図 2（b）のように考えたい．

(1) はり全体の FBD を描き，力のつり合い式と O 点まわりのモーメントのつり合い式を求めよ．

(2) はりの曲げモーメント $M(x)$を特異関数表示せよ．

(3) たわみ角およびたわみを求めたうえで（1）の結果と境界条件を考慮し，反力 R_O，R_B および反モーメント M_O を求めよ．

(4) はり全体の BMD を描け．なお，曲げモーメント $M(x)$には P，L のみを用いること．

(5) C 点に生じるたわみ角 v'_C とたわみ v_C を求めよ．

(1) はり全体の FBD を描き，力のつり合い式と O 点まわりのモーメントのつり合い式を求めよ．

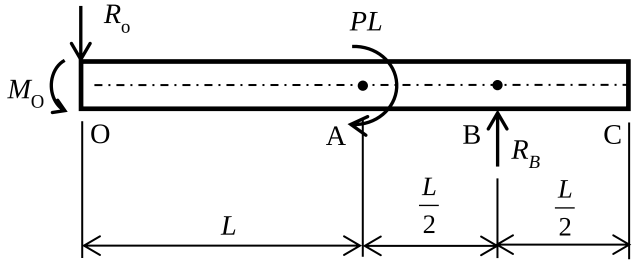

Fig.2.1 はり全体の FBD

図 2.1 において，力のつり合い式は

$$-R_0 + R_B = 0 \tag{2.1}$$

また，O 点まわりのモーメントのつり合い式は

$$-M_0 + PL - \frac{3}{2} R_B L = 0 \tag{2.2}$$

(2) はりの曲げモーメント *M*(*x*)を特異関数表示せよ．

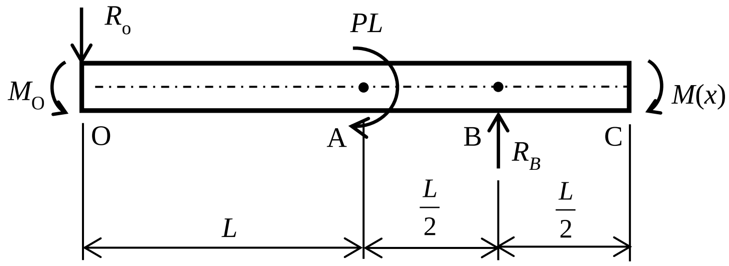

Fig.2.2 ある位置 x におけるはり全体の FBD

図 2.2 より，はりの曲げモーメント $M(x)$の特異関数表示は以下のようになる．

$$M(x) = M_0 \langle x \rangle^0 + R_0 \langle x \rangle^1 - PL \langle x - L \rangle^0 - R_B \left\langle x - \frac{3}{2} L \right\rangle^1 \tag{2.3}$$

(3) たわみ角およびたわみを求めたうえで（1）の結果と境界条件を考慮し，反力 R_O，R_B および反モーメント M_O を求めよ．

たわみの基礎式と式(2.3)より，たわみ角とたわみは次にように求められる．

$$
\begin{aligned}
-EIv''(x) &= M(x) \\
&= M_0\langle x\rangle^0 + R_0\langle x\rangle^1 - PL\langle x-L\rangle^0 - R_B\left\langle x-\frac{3}{2}L\right\rangle^1
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
-EIv'(x) = M_0\langle x\rangle^1 + \frac{R_0}{2}\langle x\rangle^2 - PL\langle x-L\rangle^1 - \frac{R_B}{2}\left\langle x-\frac{3}{2}L\right\rangle^2 + C_1\langle x\rangle^0 \tag{2.5}
$$

$$
-EIv(x) = \frac{M_0}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{R_0}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{PL}{2}\langle x-L\rangle^2 - \frac{R_B}{6}\left\langle x-\frac{3}{2}L\right\rangle^3 + C_1\langle x\rangle^1 + C_2\langle x\rangle^0 \tag{2.6}
$$

ここで，C_1，C_2 は積分定数である．左端が固定端であることから境界条件は $v'(0) = v(0) = 0$ であるので

$$
C_1 = C_2 = 0 \tag{2.7}
$$

式（2.7）を式（2.5），（2.6）に代入し整理すると，はりのたわみ角およびたわみはそれぞれ次のようになる．

$$
v'(x) = -\frac{1}{EI}\left[M_0\langle x\rangle^1 + \frac{R_0}{2}\langle x\rangle^2 - PL\langle x-L\rangle^1 - \frac{R_B}{2}\left\langle x-\frac{3}{2}L\right\rangle^2\right] \tag{2.8}
$$

$$
v(x) = -\frac{1}{EI}\left[\frac{M_0}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{R_0}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{PL}{2}\langle x-L\rangle^2 - \frac{R_B}{6}\left\langle x-\frac{3}{2}L\right\rangle^3\right] \tag{2.9}
$$

また，B 点における境界条件は $v(3L/2) = 0$ より式(2.9)に代入して

$$
0 = \frac{M_0}{2}\left(\frac{3}{2}L\right)^2 + \frac{R_0}{6}\left(\frac{3}{2}L\right)^3 - \frac{PL}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 \tag{2.10}
$$

$$
18M_0L^2 + 9R_0L^3 - 2PL^3 = 0 \tag{2.11}
$$

式(2.11)と式(2.1)，(2.2)を解くことで M_0，R_0，R_B が求まる．

$$
M_0 = -\frac{1}{3}PL, \quad R_0 = R_B = \frac{8}{9}P \tag{2.12}
$$

(4) はり全体の BMD を描け．なお，曲げモーメント *M*(*x*)には *P*，*L* のみを用いること．

（3）の結果より, M_0，R_0，R_B の値を式(2.3)に代入すると

$$M(x) = -\frac{PL}{3}\langle x \rangle^0 + \frac{8}{9}P\langle x \rangle^1 - PL\langle x - L \rangle^0 - \frac{8}{9}P\left\langle x - \frac{3}{2}L \right\rangle^1 \tag{2.13}$$

よって x の各範囲において $M(x)$は次のようになる．

(a) $0 \le x \le L$ のとき

$$M(x) = -\frac{PL}{3} + \frac{8}{9}Px \tag{2.14}$$

(b) $L \le x \le \frac{3L}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} M(x) &= -\frac{PL}{3} + \frac{8}{9}Px - PL \\ &= -\frac{4}{3}PL + \frac{8}{9}Px \end{aligned} \tag{2.15}$$

(c) $\frac{3L}{2} \le x \le 2L$ のとき

$$M(x) = -\frac{PL}{3} + \frac{8}{9}Px - PL - \frac{8}{9}Px + \frac{4}{3}PL = 0 \tag{2.16}$$

(a)〜(c)の結果より，BMD は図 2.3 のようになる．

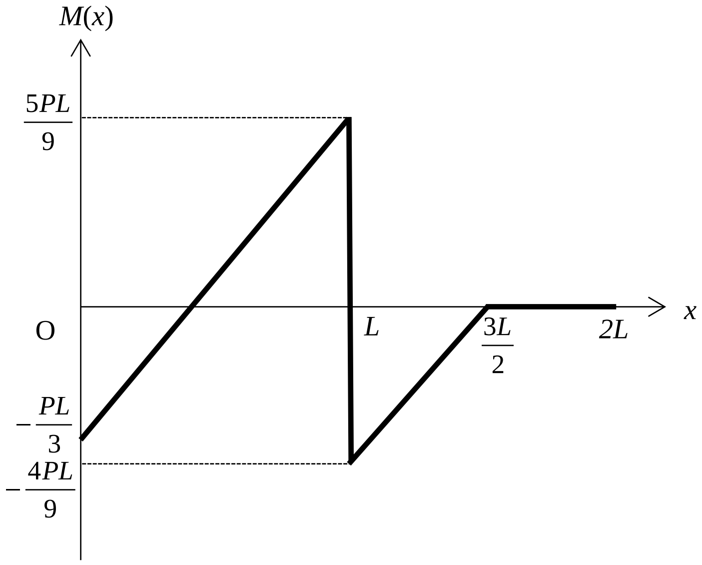

Fig.2.3 はり全体の BMD

(5) C 点に生じるたわみ角 v'_C とたわみ v_C を求めよ．

（3）の結果より，M_0，R_0，R_B の値を式(2.8)，(2.9)に代入すると

$$v'(x) = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{PL}{3}\langle x\rangle^1 + \frac{4}{9}P\langle x\rangle^2 - PL\langle x-L\rangle^1 - \frac{4}{9}P\left\langle x-\frac{3}{2}L\right\rangle^2\right] \tag{2.17}$$

$$v(x) = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{PL}{6}\langle x\rangle^2 + \frac{4P}{27}\langle x\rangle^3 - \frac{PL}{2}\langle x-L\rangle^2 - \frac{4P}{27}\left\langle x-\frac{3}{2}L\right\rangle^3\right] \tag{2.18}$$

C 点でのたわみ角およびたわみは x=2L のときであるから，たわみ角は

$$v'(2L) = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{PL}{3}(2L) + \frac{4}{9}P(2L)^2 - PL(L) - \frac{4}{9}P\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = 0 \tag{2.19}$$

同様にしてたわみは

$$v(2L) = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{PL}{6}(2L)^2 + \frac{4P}{27}(2L)^3 - \frac{PL}{2}(L)^2 - \frac{4P}{27}\left(\frac{L}{2}\right)^3\right] = 0 \tag{2.20}$$

以上より

$$v'_C = v_C = 0 \tag{2.21}$$