※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは次回演習時に返却．

材料の力学 1　Step3　第 11 回演習問題（2017/7/10 実施）

[1] 図 1 に示すように長さ $3L$ の両持ちはりに一様な分布荷重 p(AB 間)が作用している．また，はりの断面は図 2 に示す形状となっている．この時，以下の問いに答えよ．

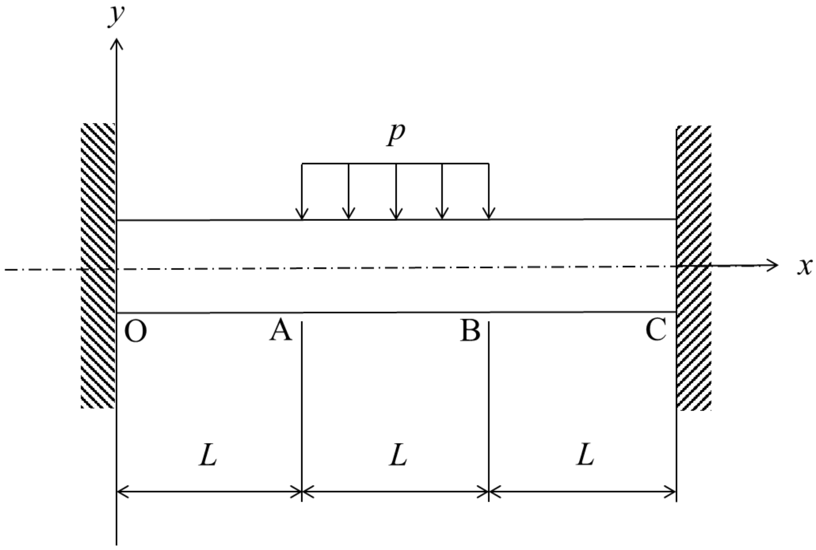

Fig.1 両持ちはり

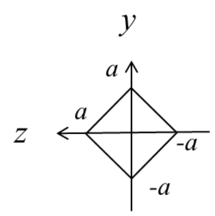

Fig.2 断面図

(1) はりの z 軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ．以下の問いでは曲げ剛性を EI として答えよ．

(2) 壁からの反力，反モーメントをそれぞれ R_O，R_C および M_O，M_C として，はり全体の FBD を描け．また，力のつりあいより R_O，R_C をそれぞれ求めよ．

(3) はり全体の曲げモーメント $M(x)$について M_O を用いて特異関数表示せよ．ただし対称性を用いてもよい．

(4) 対称性を考慮して反モーメント M_O，M_C を求めよ．

(5) はりに最大たわみが生じる位置を示し，最大たわみを求めよ．

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは次回演習時に返却．

[1]

(1) はりの z 軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ．以下の問いでは曲げ剛性を EI として答えよ．

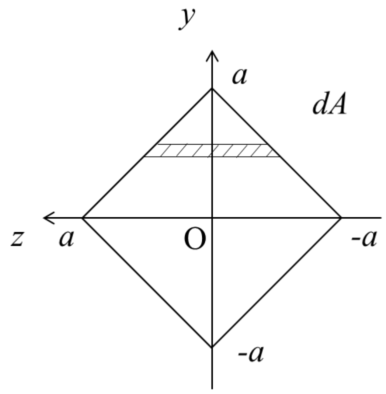

Fig. 1.1 円形断面の断面 2 次モーメントの計算

上図における微小面積 dA は

$$dA = 2(a-y)dy \tag{1.1}$$

よって，断面二次モーメント I_z は

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA \\ &= 2\int_0^a 2(a-y)y^2 dy \\ &= 4\cdot\left(\frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{4}a^4\right) \\ &= \frac{1}{3}a^4 \end{aligned} \tag{1.2}$$

と求まる．

(2) 壁からの反力，反モーメントをそれぞれ R_O，R_C および M_O，M_C として，はり全体の FBD を描け．また，力のつりあいより R_O，R_C をそれぞれ求めよ．

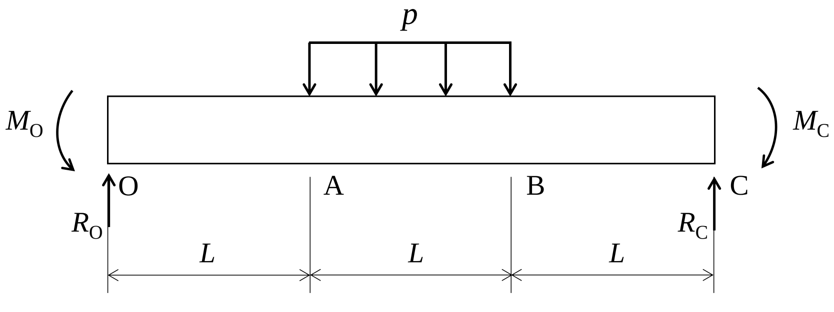

Fig. 1.2 FBD.

はり全体の力のつり合いより，

$$-pL + R_O + R_C = 0$$
$$\therefore R_O + R_C = pL \tag{1.3}$$

対称性より，壁からの反力，反モーメントをそれぞれ R_O，R_C は

$$R_O = R_C = \frac{1}{2}pL \tag{1.4}$$

となる．

(3) はり全体の曲げモーメント $M(x)$について M_O を用いて特異関数表示せよ．ただし対称性を用いてもよい．

対称性を考慮して $0 \le x < L$ の範囲で図 1.3 を用いて考える．

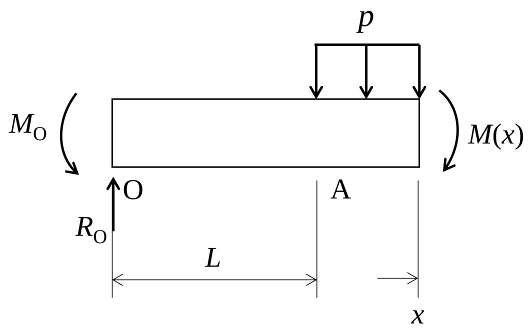

Fig. 1.3 FBD.

曲げモーメント $M(x)$について特異関数表示する．

$$M(x) = M_O\langle x\rangle^0 - \frac{pL}{2}\langle x\rangle^1 + \frac{p}{2}\langle x-L\rangle^2 \tag{1.5}$$

~別解~

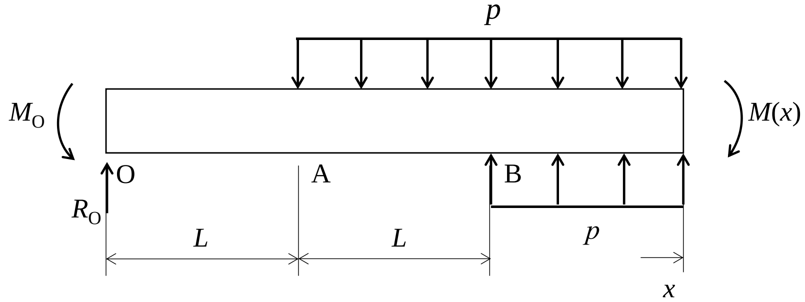

Fig. 1.4 FBD.

はり全体の曲げモーメント $M(x)$について特異関数表示する．この時，$L \le x \le 2L$ に作用する分布荷重を特異関数表示するため，図 1.4 に示したように，$2L \le x \le 3L$ に上下に分布荷重が作用していると見なす．

$$M(x) = M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^0 - \frac{pL}{2}\langle x\rangle^1 + \frac{p}{2}\langle x-L\rangle^2 - \frac{p}{2}\langle x-2L\rangle^2 \tag{A.1}$$

(4) 対称性を考慮して反モーメント M_{O}，M_{C} を求めよ．

はりのたわみの基礎式を用いて

$$-EIv''(x) = M(x) \tag{1.6}$$

上式に式(1.5)を代入して

$$-EIv''(x) = M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^0 - \frac{pL}{2}\langle x\rangle^1 + \frac{p}{2}\langle x-L\rangle^2 \tag{1.7}$$

上式の両辺を積分することで

$$-EIv'(x) = M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1 - \frac{pL}{4}\langle x\rangle^2 + \frac{p}{6}\langle x-L\rangle^3 + \mathrm{C}_1 \tag{1.8}$$

$$-EIv(x) = \frac{1}{2}M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^2 - \frac{pL}{12}\langle x\rangle^3 + \frac{p}{24}\langle x-L\rangle^4 + \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2 \tag{1.9}$$

ここで，境界条件より $v(0)= v'(0)=0$ なので $\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_2=0$ となる．
よって，たわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$の式は

$$v'(x) = -\frac{1}{EI}\left(M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1 - \frac{pL}{4}\langle x\rangle^2 + \frac{p}{6}\langle x-L\rangle^3\right) \tag{1.10}$$

$$v(x) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^2 - \frac{pL}{12}\langle x\rangle^3 + \frac{p}{24}\langle x-L\rangle^4\right) \tag{1.11}$$

と表せる．
また，対称性を考慮して式(1.11)より

$$v'\left(\frac{3}{2}L\right) = 0$$

$$-\frac{1}{EI}\left\{M_{\mathrm{O}}\cdot\frac{3}{2}L - \frac{pL}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}L\right)^2 + \frac{p}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}L\right)^3\right\} = 0 \tag{1.12}$$

$$\therefore M_{\mathrm{O}} = \frac{13}{36}pL^2 \left(= M_{\mathrm{C}}\right)$$

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは次回演習時に返却．

~別解~

はりのたわみの基礎式に式(A.1)を代入すると次のようになる．

$$-EIv''(x)=M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^0-\frac{pL}{2}\langle x\rangle^1+\frac{p}{2}\langle x-L\rangle^2-\frac{p}{2}\langle x-2L\rangle^2 \tag{A.2}$$

上式の両辺を積分することで

$$-EIv'(x)=M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1-\frac{pL}{4}\langle x\rangle^2+\frac{p}{6}\langle x-L\rangle^3-\frac{p}{6}\langle x-2L\rangle^3+\mathrm{C}_1 \tag{A.3}$$

$$-EIv(x)=\frac{1}{2}M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^2-\frac{pL}{12}\langle x\rangle^3+\frac{p}{24}\langle x-L\rangle^4-\frac{p}{24}\langle x-2L\rangle^4+\mathrm{C}_1x+\mathrm{C}_2 \tag{A.4}$$

ここで，境界条件より $v(0)=v'(0)=0$ なので $\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_2=0$ となる．

よって，たわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$の式は

$$v'(x)=-\frac{1}{EI}\left(M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1-\frac{pL}{4}\langle x\rangle^2+\frac{p}{6}\langle x-L\rangle^3-\frac{p}{6}\langle x-2L\rangle^3\right) \tag{A.5}$$

$$v(x)=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^2-\frac{pL}{12}\langle x\rangle^3+\frac{p}{24}\langle x-L\rangle^4-\frac{p}{6}\langle x-2L\rangle^3\right) \tag{A.6}$$

と表せる．

(5) はりに最大たわみが生じる位置を示し，最大たわみを求めよ．

式(1.11)および式(1.12)より

$$v(x)=-\frac{1}{EI}\left(\frac{13}{72}\langle x\rangle^2-\frac{pL}{12}\langle x\rangle^3+\frac{p}{24}\langle x-L\rangle^4-\frac{p}{6}\langle x-2L\rangle^3\right) \tag{1.13}$$

が成立する．最大たわみは $x=\dfrac{3}{2}L$ において生じるため，式(1.13)より

$$\begin{aligned}v_{\max}&=v\left(\frac{3}{2}L\right)\\&=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}M_{\mathrm{O}}\left(\frac{3}{2}L\right)^2-\frac{pL}{12}\left(\frac{3}{2}L\right)^3+\frac{p}{24}\left(\frac{1}{2}L\right)^4\right\}\\&=-\frac{49}{384}\frac{pL^4}{EI}\end{aligned} \tag{1.14}$$

となる．

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは次回演習時に返却．

[2] 図3に示すように，単純支持された長さ $2L$ のはりがA点で集中荷重 P を受けており BC間に分布荷重 q が作用している．このとき以下の問いに答えよ．ただし，はりの曲げ剛性は EI とする．

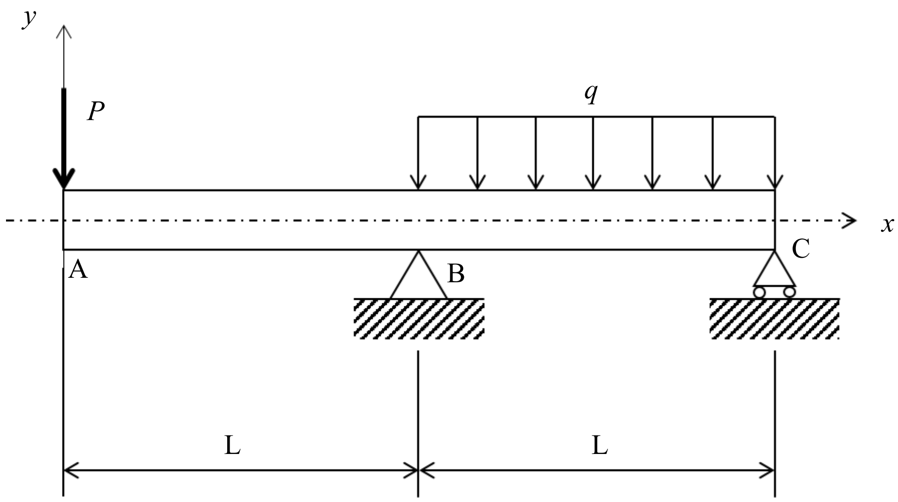

Fig. 3 単純支持されたはり

(1) はり全体のFBDを描きB点の反力 R_B，C点の反力 R_C をそれぞれ求めよ．

(2) AC間に生じる曲げモーメント $M(x)$を特異関数表示せよ．

(3) A点に生じるたわみ v_A を P，q を用いて表せ．

(4) A点に生じるたわみが0となる時の集中荷重 P と分布荷重 q の関係を求めよ．

[2]

(1) はり全体の FBD を描き B 点の反力 R_B，C 点の反力 R_C をそれぞれ求めよ．

はり全体の FBD を描くと以下のようになる．

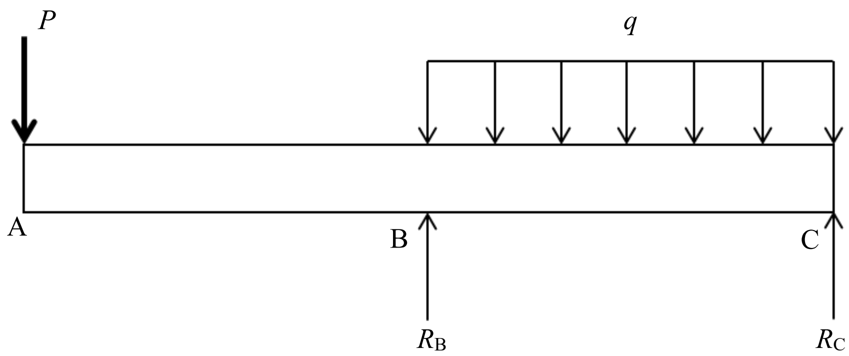

Fig. 2.1 FBD.

はり全体の力のつり合いより，

$$R_B + R_C - P - qL = 0 \tag{2.1}$$

また，C 点まわりのモーメントのつり合いより，

$$-\frac{1}{2}qL^2 - 2PL + R_B L = 0 \tag{2.2}$$

よって

$$R_B = 2P + \frac{1}{2}qL \tag{2.3}$$

また，式(2.1)より

$$R_C = -P + \frac{1}{2}qL \tag{2.4}$$

(2) AC 間に生じる曲げモーメント $M(x)$を特異関数表示せよ．

$M(x)$を特異関数表示すると

$$M(x) = P\langle x\rangle^1 - \left(2P + \frac{qL}{2}\right)\langle x-L\rangle^1 + \frac{q}{2}\langle x-L\rangle^2 \tag{2.5}$$

(3)　A 点に生じるたわみ v_A を P，q を用いて表せ．

はりとたわみの基礎式より

$$-EIv'' = M(x) \tag{2.6}$$

(2)の結果より

$$-EIv'' = P\langle x\rangle^1 - \left(2P + \frac{qL}{2}\right)\langle x-L\rangle^1 + \frac{q}{2}\langle x-L\rangle^2 \tag{2.7}$$

式(2.7)の式を両辺積分して

$$-EIv' = \frac{P}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{1}{2}\left(2P + \frac{qL}{2}\right)\langle x-L\rangle^2 + \frac{q}{6}\langle x-L\rangle^3 + \mathrm{C}_1 \tag{2.8}$$

$$-EIv = \frac{P}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{1}{6}\left(2P + \frac{qL}{2}\right)\langle x-L\rangle^3 + \frac{q}{24}\langle x-L\rangle^4 + \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2 \tag{2.9}$$

ただし，C_1，C_2 は積分定数である．

ここで，境界条件考える．

$$v(L) = 0 \tag{2.10}$$

$$v(2L) = 0 \tag{2.11}$$

よって式(2.8)，式(2.9)より

$$\frac{P}{6}L^3 + \mathrm{C}_1 L + \mathrm{C}_2 = 0 \tag{2.12}$$

また式(2.8)，式(2.10)より

$$\frac{4}{3}PL^3 - \left(\frac{P}{3} + \frac{1}{12}qL\right)L^3 + \frac{q}{24}L^4 + 2\mathrm{C}_1 L + \mathrm{C}_2 = 0 \tag{2.13}$$

$$PL^3 - \frac{q}{24}L^4 + 2\mathrm{C}_1 L + \mathrm{C}_2 = 0 \tag{2.14}$$

式(2.11)，式(2.12)’より

$$\mathrm{C}_1 = -\frac{5}{6}PL^2 + \frac{1}{24}qL^3 \tag{2.15}$$

式(2.11)，式(2.13)より

$$\mathrm{C}_2 = \frac{2}{3}PL^3 - \frac{1}{24}qL^4 \tag{2.16}$$

よってたわみの式は

$$v = -\frac{1}{EI}\left(\frac{P}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{1}{6}\left(2P + \frac{qL}{2}\right)\langle x-L\rangle^3 + \frac{q}{24}\langle x-L\rangle^4 + \left(-\frac{5}{6}PL^2 + \frac{1}{24}qL^3\right)x + \frac{2}{3}PL^3 - \frac{1}{24}qL^4\right) \tag{2.17}$$

A 点でのたわみ v_A は式(2.17)に x=0 を代入すればよいので

$$v_A = -\frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}PL^3 - \frac{1}{24}qL^4\right) \tag{2.18}$$

(4)　A 点に生じるたわみが 0 となる時の集中荷重 *P* と分布荷重 *q* の関係を求めよ．

(3)より

$$v_{\mathrm{A}} = \frac{2}{3}PL^3 - \frac{1}{24}qL^4 \tag{2.19}$$

$v_{\mathrm{A}}=0$ のとき，

$$\frac{2}{3}PL^3 - \frac{1}{24}qL^4 = 0 \tag{2.20}$$

よって集中荷重 P と分布荷重 q の関係は，

$$P = \frac{1}{16}qL \tag{2.21}$$