※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みレポートは次回演習時に返却．

材料の力学 1　Step3　第 10 回演習問題　(2016/7/4 実施)

[1]　一方の端（点 O）で壁に固定された長さ 2*L* のはりに分布荷重 *p* が，点 A（*x*=*L*）に集中荷重 *P* が負荷されている．はりの縦弾性係数を *E*，断面 2 次モーメントを *I* として以下の問いに答えよ．

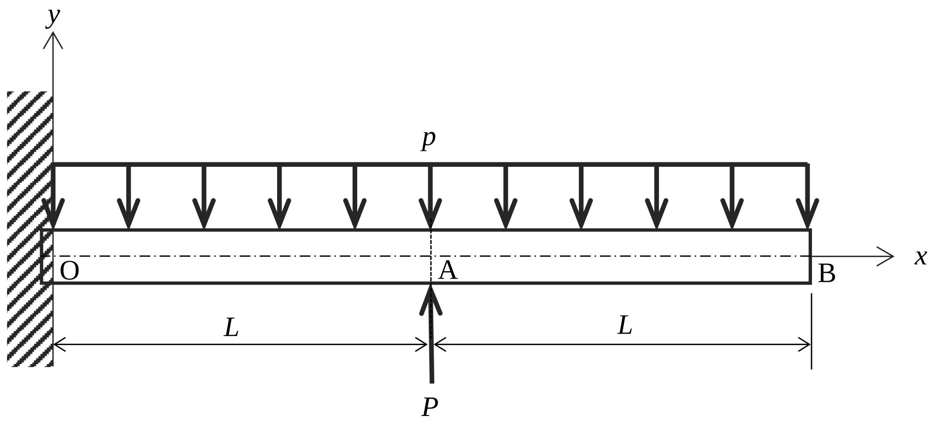

Fig. 1 分布荷重を受けるはり．

(1)　はりの FBD を描き，点 O に作用する反力を R_O，反モーメントを M_O を求めよ．

(2)　はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$をそれぞれ求めよ．

(3)　はりのたわみ角 $v'(x)$，およびはりのたわみ $v(x)$をそれぞれ求めよ．

(4)　はりの先端（点 B）のたわみ角 v'_B，たわみ v_B をそれぞれ求めよ．

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みレポートは次回演習時に返却．

[1]

(1) はりの FBD を描き，点 O に作用する反力を R_O，反モーメントを M_O を求めよ．

はりの FBD は，

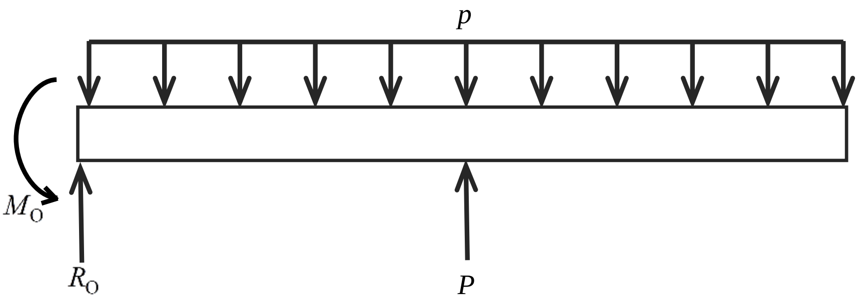

Fig. 1.1 FBD.

と表される．よって，はりに関する力のつり合いの式，および点 O まわりの力のモーメントのつり合い式は，

$$R_O + P - 2pL = 0$$

$$R_O = 2pL - P \tag{1.1}$$

$$-M_O + \int_0^{2L} px\,dx - PL = 0$$

$$M_O = 2pL^2 - PL \tag{1.2}$$

で表される．

(2) はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$をそれぞれ求めよ．

(ｉ) $0 \le x < L$ のとき

x 方向に変化するはりについての FBD は，

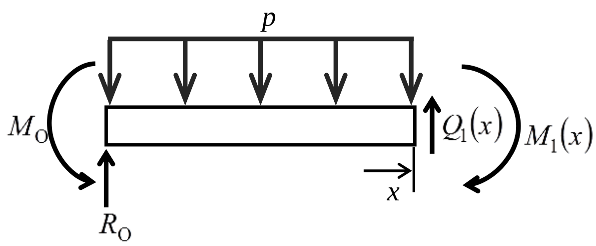

Fig. 1.2 FBD.

と表される．

x までのはりに関する力のつり合いの式，および力のモーメントのつり合い式は，

$$R_{\mathrm{O}}+Q_1(x)-px=0$$
$$Q_1(x)=px-R_0$$
$$=px+P-2pL \tag{1.3}$$

$$-M_{\mathrm{O}}+R_O x-\int_0^x px\,dx+M_1(x)=0$$
$$M_1(x)=M_{\mathrm{O}}-R_O x+\frac{1}{2}px^2$$
$$=\frac{1}{2}px^2+(P-2pL)x+\left(2pL^2-PL\right) \tag{1.4}$$

で表される．

(ⅱ) $L<x\leq 2L$ のとき

x 方向に変化するはりについての FBD は，

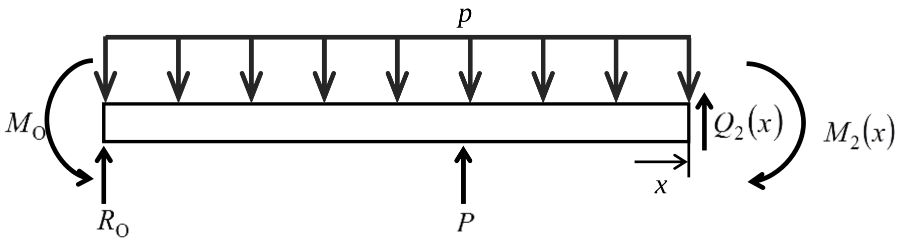

Fig. 1.3 FBD.

と表される．

x までのはりに関する力のつり合いの式，および力のモーメントのつり合い式は，

$$R_{\mathrm{O}}+P+Q_2(x)-px=0$$
$$Q_2(x)=px-R_{\mathrm{O}}-P$$
$$=px-2pL \tag{1.5}$$

$$-M_{\mathrm{O}}+R_0 x+P(x-L)-\int_0^x px\,dx+M_2(x)=0$$
$$M_2(x)=2pL^2-PL-x(2pL-P)-P(x-L)+\frac{1}{2}px^2$$
$$=\frac{1}{2}px^2-2pLx+2pL^2 \tag{1.6}$$

で表される．

よって，はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$は，

$$Q(x)=\begin{cases} P+p(x-2L) & (0 \le x < L) \\ p(x-2L) & (L < x \le 2L) \end{cases} \tag{1.7}$$

$$M(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}px^2+(P-2pL)x+(2pL^2-PL) & (0 \le x < L) \\ \frac{1}{2}px^2-2pLx+2pL^2 & (L < x \le 2L) \end{cases} \tag{1.8}$$

と表される．

(3) はりのたわみ角 $v'(x)$，およびはりのたわみ $v(x)$をそれぞれ求めよ．

はりのたわみに関する基礎式は,

$$-EIv''(x)=M(x) \tag{1.9}$$

と表される．

(ｉ) $0 \le x \le L$ のとき

式(1.9)に式(1.8)を代入すると,

$$-EIv_1''(x)=\frac{1}{2}px^2+(P-2pL)x+(2pL^2-PL) \tag{1.10}$$

$$v_1'(x)=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}px^3+\left(\frac{1}{2}P-pL\right)x^2+\left(2pL^2-PL\right)x+\mathrm{C}_1\right\} \tag{1.11}$$

$$v_1(x)=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{24}px^4+\left(\frac{1}{6}P-\frac{1}{3}pL\right)x^3+\left(pL^2-\frac{1}{2}PL\right)x^2+\mathrm{C}_1x+\mathrm{C}_2\right\} \tag{1.12}$$

($\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$:積分定数)

境界条件より $v_1'(0)=v_1(0)=0$ となるため，$\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_2=0$ となる．よって，

$$v_1'(x)=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}px^3+\left(\frac{1}{2}P-pL\right)x^2+\left(2pL^2-PL\right)x\right\} \tag{1.13}$$

$$v_1(x)=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{24}px^4+\left(\frac{1}{6}P-\frac{1}{3}pL\right)x^3+\left(pL^2-\frac{1}{2}PL\right)x^2\right\} \tag{1.14}$$

と表される．

(ⅱ) $L \le x \le 2L$ のとき

式(1.9)に式(1.8)を代入すると，

$$-EIv_2''(x)=\frac{1}{2}px^2-2pLx+2pL^2 \tag{1.15}$$

$$v_2'(x)=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}px^3-pLx^2+2pL^2x+\mathrm{C}_3\right) \tag{1.16}$$

$$v_2(x)=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}px^4-\frac{1}{3}pLx^3+pL^2x^2+\mathrm{C}_3x+\mathrm{C}_4\right) \tag{1.17}$$

($\mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4$:積分定数)

$x=L$ のときのたわみ角 $v_1'(L)=v_2'(L)$ とたわみ $v_1(L)=v_2(L)$ の条件により C_3，C_4 を決定する．

$$v_1'(L)=v_2'(L) \tag{1.18}$$

$$-\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}PL^2+\frac{7}{6}pL^3\right)=-\frac{1}{EI}\left(\mathrm{C}_3+\frac{7}{6}pL^3\right) \tag{1.19}$$

$$\mathrm{C}_3=-\frac{1}{2}PL^2 \tag{1.20}$$

$$v_1(L)=v_2(L) \tag{1.21}$$

$$-\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{3}PL^3+\frac{17}{24}pL^4\right)=-\frac{1}{EI}\left(\mathrm{C}_4-\frac{1}{2}pL^3+\frac{17}{24}pL^4\right) \tag{1.22}$$

$$\mathrm{C}_4=\frac{1}{6}PL^3 \tag{1.23}$$

よって，たわみ角 $v'(x)$とたわみ $v(x)$は，

$$v'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{EI}\left\{\dfrac{1}{6}px^3+\left(\dfrac{1}{2}P-pL\right)x^2+\left(2pL^2-PL\right)x\right\} & (0\le x\le L) \\ -\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{6}px^3-pLx^2+2pL^2x-\dfrac{1}{2}PL^2\right) & (L\le x\le 2L) \end{cases} \tag{1.24}$$

$$v(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{EI}\left\{\dfrac{1}{24}px^4+\left(\dfrac{1}{6}P-\dfrac{1}{3}pL\right)x^3+\left(pL^2-\dfrac{1}{2}PL\right)x^2\right\} & (0\le x\le L) \\ -\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{24}px^4-\dfrac{1}{3}pLx^3+pL^2x^2-\dfrac{1}{2}PL^2x+\dfrac{1}{6}PL^3\right) & (L\le x\le 2L) \end{cases} \tag{1.25}$$

と表される．

(4) はりの先端（点 B）のたわみ角 v'_{B}，たわみ v_{B} をそれぞれ求めよ．

式(1.24)，式(1.25)に x=2L を代入すると，

$$v'_{\mathrm{B}} = v'(2L) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{4}{3}pL^3 - \frac{1}{2}PL^2\right) \tag{1.26}$$

$$v_{\mathrm{B}} = v(2L) = -\frac{1}{EI}\left(2pL^4 - \frac{5}{6}PL^3\right) \tag{1.27}$$

と表される．

<u>※解答の導出過程がないレポートは認めない．</u>
<u>採点済みレポートは次回演習時に返却．</u>

[2] 図 2 に示すような段付き中実はりについて考える．B 点，D 点で単純支持されており，A 点，E 点には集中荷重 P が作用している．はりの側面図は図 3 のようになっており，AB 間，DE 間では半径 r，BD 間では半径 $\sqrt{2}r$ である．また，はりの縦弾性係数を E とする．このとき以下の問いに答えよ．

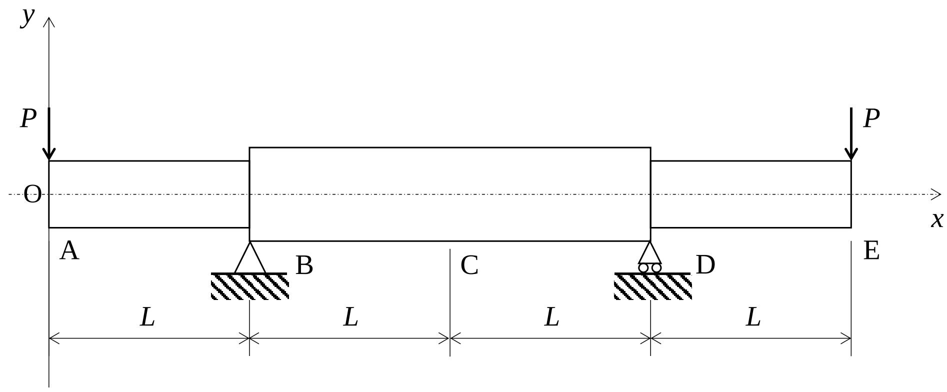

Fig. 2

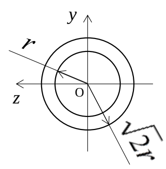

Fig. 3

(1) AB 間の断面 2 次モーメント I_{z1}，BC 間の断面 2 次モーメント I_{z2} をそれぞれ求めよ．

(2) FBD を描き，B 点，D 点における支点反力 R_B，R_D をそれぞれ求めよ．

(3) はり全体の SFD，BMD を描け．

(4) A 点におけるたわみ v_A，C 点におけるたわみ v_C をそれぞれ求めよ．

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

[2]

(1) **AB 間の断面 2 次モーメント I_{z1}, BC 間の断面 2 次モーメント I_{z2} をそれぞれ求めよ.**

図 2.1 に示す円形断面を持つはりの z 軸に関する断面 2 次モーメントを求める.

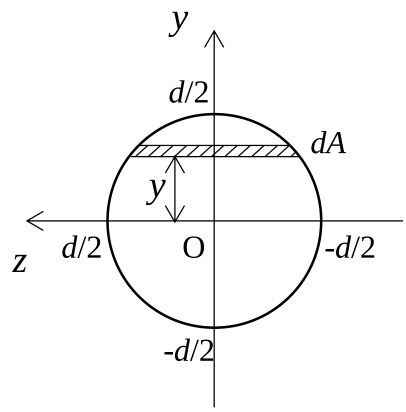

Fig. 2.1 円形断面の断面 2 次モーメントの計算.

上図における微小面積 dA は

$$dA = 2\sqrt{\frac{d^2}{4} - y^2}\,dy \tag{2.1}$$

よって, 断面二次モーメント I_z は

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} 2y^2 \sqrt{\frac{d^2}{4} - y^2}\,dy \tag{2.2}$$

ここで,

$$y = \frac{d}{2}\sin\theta \tag{2.3}$$

とおけば

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2 \cdot \frac{d^2}{4}\sin^2\theta \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{4}\sin^2\theta}\,\frac{d}{2}\cos\theta \right) d\theta \\ &= \frac{d^4}{64}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta)\,d\theta = \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる. 上式に d=2r, d= $2\sqrt{2}r$ をそれぞれ代入することで, AB 間の断面 2 次モーメント I_{z1}, BC 間の断面 2 次モーメント I_{z2} は

$$I_{z1} = \frac{\pi(2r)^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} \tag{2.5}$$

$$I_{z2} = \frac{\pi(2\sqrt{2}r)^4}{64} = \pi r^4 \tag{2.6}$$

と求まる.

<u>※解答の導出過程がないレポートは認めない．</u>
<u>採点済みレポートは次回演習時に返却．</u>

(2) FBD を描き，B 点，D 点における支点反力 R_B，R_D をそれぞれ求めよ．

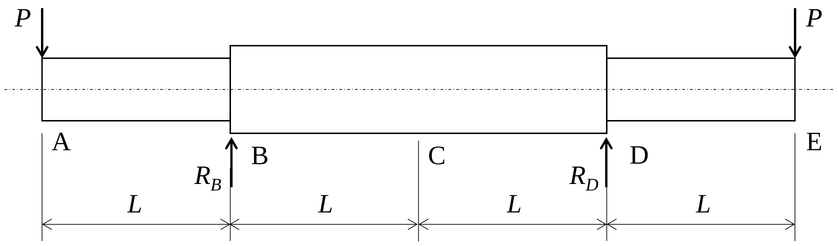

Fig. 2.2 FBD.

力のつり合いより

$$
\begin{aligned}
&-P+R_B+R_D-P=0\\
&\therefore R_B+R_D=2P
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

対称性より，支点反力 R_B，R_D はそれぞれ

$$R_B=R_D=P \tag{2.8}$$

となる．

(3) はり全体の SFD，BMD を描け．

(i) $0\le x<L$ のとき

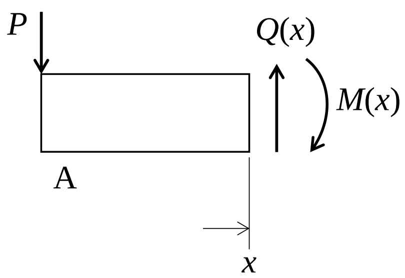

Fig. 2.3 FBD.

せん断力 $Q(x)$は力のつり合いより

$$
\begin{aligned}
&-P+Q(x)=0\\
&\therefore Q(x)=P
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

曲げモーメント $M(x)$はモーメントのつり合いより

$$
\begin{aligned}
&-Px+M(x)=0\\
&\therefore M(x)=Px
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

(ii) $L < x \leq 2L$ のとき

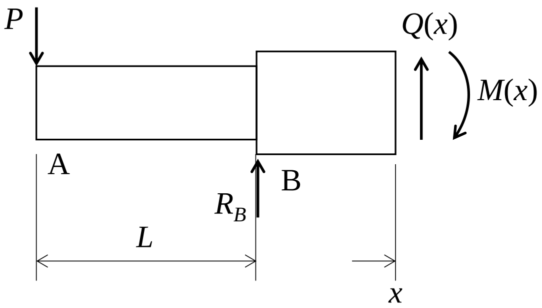

Fig. 2.4 FBD.

せん断力 $Q(x)$は力のつり合いより

$$\begin{aligned} -P + R_{\mathrm{B}} + Q(x) = 0 \\ \therefore Q(x) = P - R_{\mathrm{B}} = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

曲げモーメント $M(x)$はモーメントのつり合いより

$$\begin{aligned} -Px + R_{\mathrm{B}}(x - L) + M(x) = 0 \\ \therefore M(x) = Px - R_{\mathrm{B}}(x - L) = PL \end{aligned} \tag{2.12}$$

対称性を考慮して SFD，BMD は以下のように表せる．対称性を考慮する際，$Q(x)$，$M(x)$の正負に注意する．

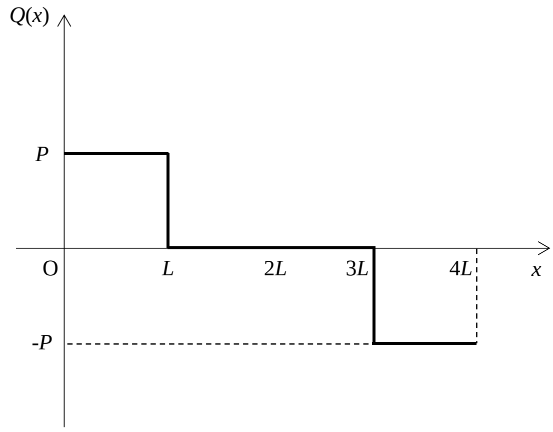

Fig. 2.5 SFD.

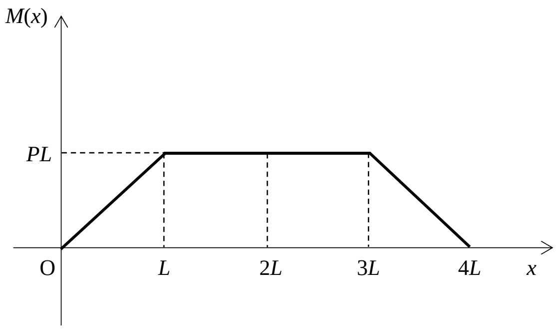

Fig. 2.6 BMD.

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みレポートは次回演習時に返却．

(4) A 点におけるたわみ v_A，C 点におけるたわみ v_C をそれぞれ求めよ．

AB 間のたわみを $v_1(x)$，BC 間のたわみを $v_2(x)$とする．

たわみに関する基礎式は

$$-EI\,v''(x) = M(x) \tag{2.13}$$

と表される．区間ごとに積分を行い，たわみ $v(x)$を求める．

(i) $0 \le x \le L$ のとき

式(2.10)を式(2.13)に代入して，以下の式が得られる．

$$-EI_{z1}v_1''(x) = Px \tag{2.14}$$

上式の両辺を積分することで

$$-EI_{z1}v_1'(x) = \frac{1}{2}Px^2 + C_1 \qquad (C_1\text{:積分定数}) \tag{2.15}$$

$$-EI_{z1}v_1(x) = \frac{1}{6}Px^3 + C_1x + C_2 \qquad (C_2\text{:積分定数}) \tag{2.16}$$

たわみ角 v'_1 とたわみ v_1 は，AB 間における断面 2 次モーメントが $I_{z1}=\pi r^4/4$ であるので，

$$v_1'(x) = -\frac{4}{E\pi r^4}\left(\frac{1}{2}Px^2 + C_1\right) \tag{2.17}$$

$$v_1(x) = -\frac{4}{E\pi r^4}\left(\frac{1}{6}Px^3 + C_1x + C_2\right) \tag{2.18}$$

となる．

(ii) $L \le x \le 2L$ のとき

式(2.12)を式(2.13)に代入して，以下の式が得られる．

$$-EI_{z2}v_2''(x) = PL \tag{2.19}$$

上式の両辺を積分することで

$$-EI_{z2}v_2'(x) = PLx + C_3 \qquad (C_3\text{:積分定数}) \tag{2.20}$$

$$-EI_{z2}v_2(x) = \frac{1}{2}PLx^2 + C_3x + C_4 \qquad (C_4\text{:積分定数}) \tag{2.21}$$

たわみ角 v'_2 とたわみ v_2 は，BC 間における断面 2 次モーメントが $I_{z2}=\pi r^4$ であるので，

$$v_2'(x) = -\frac{1}{EI_{z2}}(PLx + C_3) \tag{2.22}$$

$$v_2(x) = -\frac{1}{E\pi r^4}\left(\frac{1}{2}PLx^2 + C_3x + C_4\right) \tag{2.23}$$

ここで，C 点において対称性より $v_2'(2L)=0$ なので

$$v_2'(2L) = -\frac{1}{E\pi r^4}(2PL^2 + C_3) = 0 \\ \therefore C_3 = -2PL^2 \tag{2.24}$$

となる．また，接続条件より $v_1'(L)= v_2'(L)$なので

$$-\frac{4}{E\pi r^4}(\frac{1}{2}PL^2 + C_1) = -\frac{1}{E\pi r^4}(PL^2 + C_3) \\ \therefore C_1 = \frac{C_3 - PL^2}{4} = -\frac{3}{4}PL^2 \tag{2.25}$$

となる．境界条件より $v_1(L)= v_2(L)=0$ なので

$$v_1(L) = -\frac{4}{E\pi r^4}(\frac{1}{6}PL^3 + C_1 L + C_2) = 0 \\ \therefore C_2 = \frac{7}{12}PL^3 \tag{2.26}$$

$$v_2(L) = -\frac{1}{E\pi r^4}(\frac{1}{2}PL^3 + C_3 L + C_4) = 0 \\ \therefore C_4 = \frac{3}{2}PL^3 \tag{2.27}$$

となり，積分定数 C_1~C_4 が求まった．

以上より，AB 間に生じるたわみ v_1 と BC 間に生じるたわみ v_2 は

$$v_1(x) = -\frac{4}{E\pi r^4}(\frac{1}{6}Px^3 - \frac{3}{4}PL^2 x + \frac{7}{12}PL^3) \tag{2.28}$$

$$v_2(x) = -\frac{1}{E\pi r^4}(\frac{1}{2}PLx^2 - 2PL^2 x + \frac{3}{2}PL^3) \tag{2.29}$$

となる．

A 点におけるたわみ v_A は，式(2.28)に x=0 を代入して

$$v_A = -\frac{7PL^3}{3E\pi r^4} \tag{2.30}$$

C 点におけるたわみ v_C は，式(2.29)に x=2L を代入して

$$v_C = -\frac{1}{E\pi r^4}(2PL^3 - 4PL^3 + \frac{3}{2}PL^3) = \frac{PL^3}{2E\pi r^4} \tag{2.31}$$

となる．