**※解答の導出過程がないレポートは認めない．**
採点済みレポートは次回演習時に返却．

# 材料の力学 1　Step2　第 9 回演習問題 (2017/6/27 実施)

[1] 図 1 に示すように中空の片持ちはりに一様な分布荷重 $p$ と集中荷重 $P$ が作用している．また，はりの断面形状は図 2 のようになっている．このとき以下の問いに答えよ．

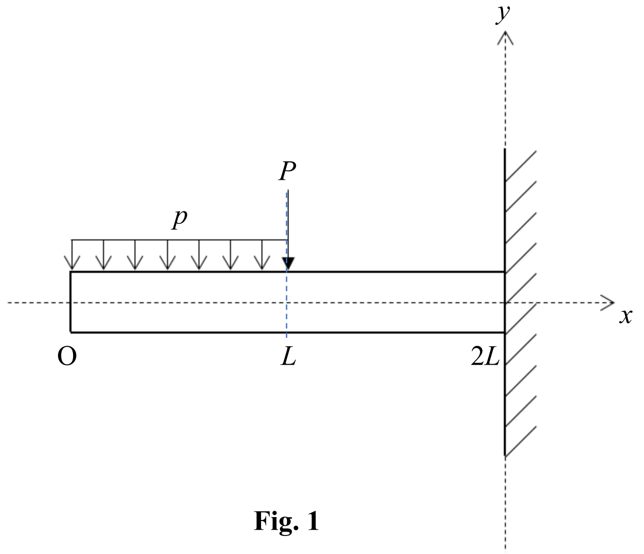



**Fig. 1**

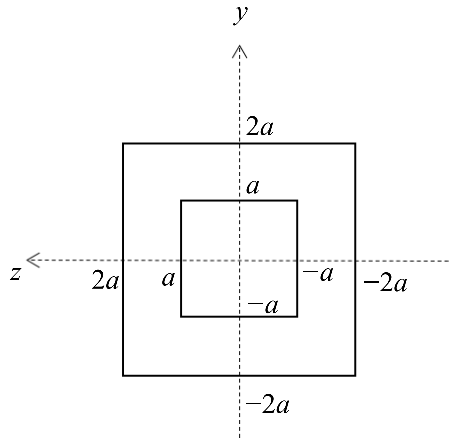



**Fig. 2**

(1) このはりの $z$ 軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ．

(2) はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 $R_o$ と反モーメント $M_o$ を求めよ．

(3) 位置 $x$ の仮想断面において, はりに作用するせん断力 $Q(x)$及び曲げモーメント $M(x)$を求め，SFD と BMD を描け．

(4) はりに生じる最大曲げ応力$\sigma_{max}$を求めよ．

**※解答の導出過程がないレポートは認めない．**
採点済みレポートは次回演習時に返却．

[1]

**(1) このはりの $z$ 軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ．**

$z$ 軸に関する断面 2 次モーメント $I_z$ は以下のように求まる．

$$I_z = \frac{1}{12}(4a)^4 - \frac{1}{12}(2a)^4 = 20a^4 \tag{1.1}$$

**(2) はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 $R_o$ と反モーメント $M_o$ を求めよ．**

はり全体の FBD を以下の図に示す．

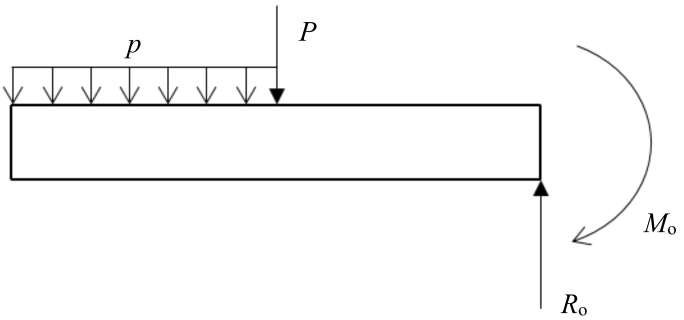



Fig. 1.1 FBD

力のつり合いより，

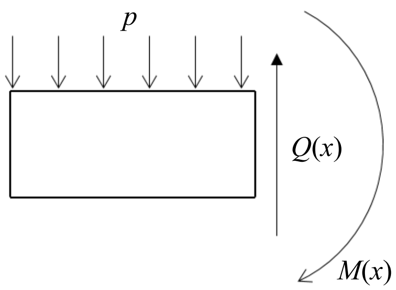
$$-P - pL + R_o = 0 \quad \therefore R_o = P + pL \tag{1.2}$$

また，左端におけるモーメントのつり合いより，

$$\int_0^L pxdx + PL - 2R_oL + M_o = 0 \ , \ \therefore M_o = PL + \frac{3}{2}pL^2 \tag{1.3}$$

**(3) 位置 $x$ の仮想断面において，はりに作用するせん断力 $Q(x)$及び曲げモーメント $M(x)$を求め，SFD と BMD を描け．**

(i) $0 \le x < L$ のとき




力のつり合いより，

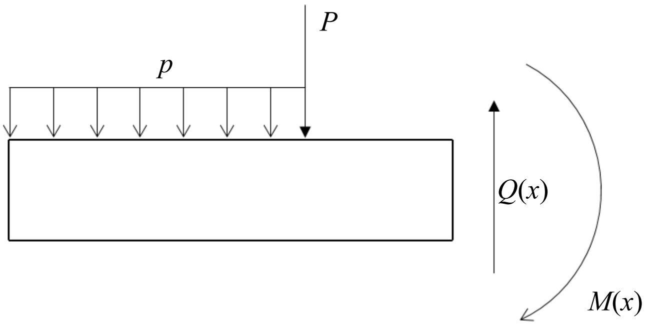
$$Q(x) - px = 0 \ , \ \therefore Q(x) = px \tag{1.4}$$

また，右端におけるモーメントのつり合いより，

$$M(x) - \frac{1}{2}px^2 = 0 \ , \ \therefore M(x) = \frac{1}{2}px^2 \tag{1.5}$$

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みレポートは次回演習時に返却．

(ii) $L < x \le 2L$ のとき




力のつり合いより，

$$Q(x) - P - pL = 0 \ , \ \therefore Q(x) = P + pL \tag{1.6}$$

また，左端におけるモーメントのつり合いより，

$$\frac{1}{2}pL^2 + PL - Q(x)\cdot x + M(x) = 0 \ , \ M(x) = (P + pL)x - PL - \frac{1}{2}pL^2 \tag{1.7}$$

以上より，SFD，BMD を描くと以下のようになる．

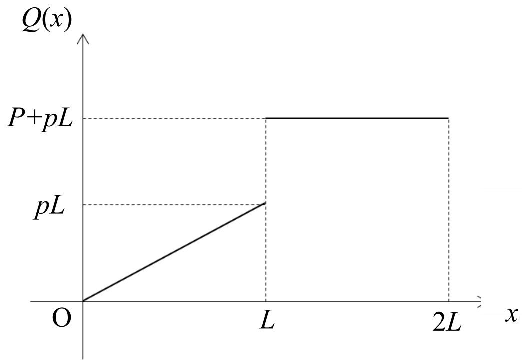



Fig. 1.2 SFD

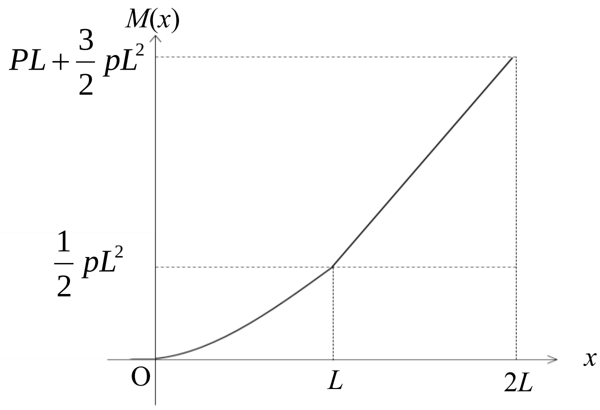



Fig. 1.3 BMD

**(4) はりに生じる最大曲げ応力$\sigma_{max}$を求めよ．**

BMD より，最大曲げモーメント $M_{max}$ は $x = 2L$ のときに生じ，その値は，

$$M_{max} = PL + \frac{3}{2}pL^2 \tag{1.8}$$

である．また，図心から最も離れるとき， $y = \pm 2a$ であり，最大曲げ応力$\sigma_{max}$は，

$$\sigma_{max} = \left| \frac{M_{max} \times (\pm 2a)}{I_z} \right| = \frac{\left( PL + \frac{3}{2}pL^2 \right) \times 2a}{20a^4} = \frac{2PL + 3pL^2}{20a^3} \tag{1.9}$$

<u>**※解答の導出過程がないレポートは認めない．**</u>

<u>採点済みレポートは次回演習時に返却．</u>

[2] 図 3 に示すような長さ $3L$ の片持ちはりがある．B 点には長さ $L/2$ の剛体レバーが付いており, C 点に集中荷重 $2pL$ が作用している. DE 間には分布荷重 $p$ が作用している. また，はりは図 4 に示すような断面形状を有する I 形鋼とする．このとき以下の設問に答えよ．

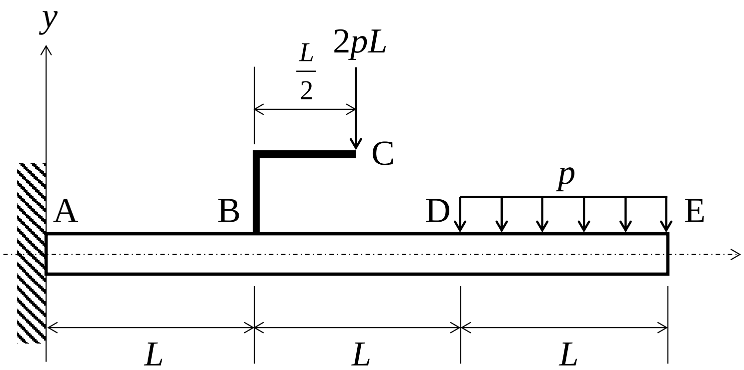



**Fig. 3**

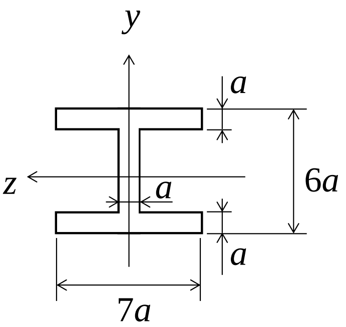



**Fig. 4**

(1) このはりの $z$ 軸に関する断面 2 次モーメント $I_z$ を求めよ．

(2) 剛体レバーの FBD を描き，B 点での反力 $R_B$，反モーメント $M_B$ を求めよ．

(3) はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 $R_A$，および反モーメント $M_A$ を求めよ．

(4) はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$を求め，SFD と BMD を描け．

(5) $a$=5[mm]，$p$=25[N/mm]，$L$=47[mm]のとき，はりに生じる最大曲げ応力$\sigma_{max}$ を求めよ．

**※解答の導出過程がないレポートは認めない.**
採点済みレポートは次回演習時に返却.

**(1)　このはりの $z$ 軸に関する断面 2 次モーメント $I_z$ を求めよ.**

$z$ 軸が幅 $b$，高さ $h$ の長方形断面の図心を通る場合，$z$ 軸に関する断面 2 次モーメントは

$$I_z = \frac{1}{12} bh^3 \tag{2.1}$$

で表される．図 4 に示すはりについて，幅 $7a$，高さ $6a$ の長方形の断面 2 次モーメントから幅 $3a$，高さ $4a$ の長方形の断面 2 次モーメントの 2 倍を引くことにより，はりの z 軸に関する断面 2 次モーメントは

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 7a \cdot (6a)^3 - 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 3a \cdot (4a)^3 = 94a^4 \tag{2.2}$$

となる.

**(2) 剛体レバーの FBD を描き，B 点での反力 $R_B$，反モーメント $M_B$ を求めよ.**

図 2.1 に剛体レバーの FBD を示す.

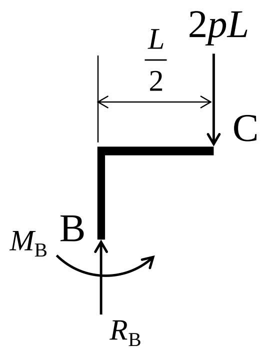



Fig. 2.1 剛体レバーの FBD.

力のつりあいより

$$R_B - 2pL = 0 \qquad \therefore R_B = 2pL \tag{2.3}$$

B 点まわりのモーメントのつりあいより

$$-M_B + 2pL \cdot \frac{L}{2} = 0 \qquad \therefore M_B = pL^2 \tag{2.4}$$

**(3) はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 $R_A$，および反モーメント $M_A$ を求めよ.**

図 2.2 にはり全体の FBD を示す．なお，B 点に生じる力およびモーメントは(2)で導出した $R_B$，$M_B$ から作用反作用により求めることができる.

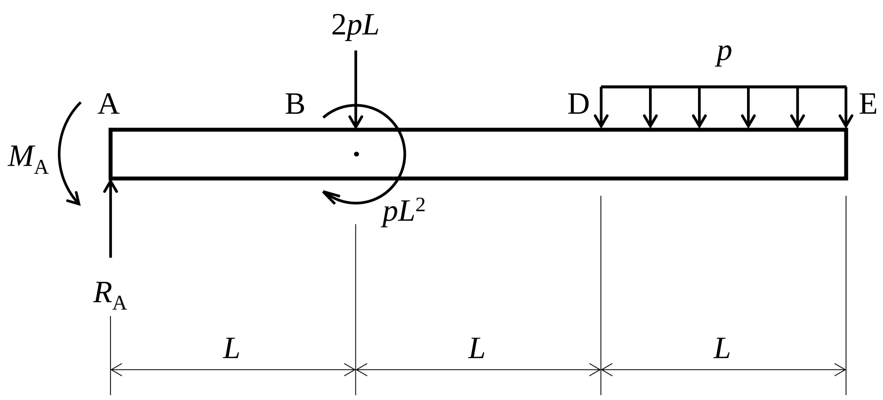



Fig. 2.2 はり全体の FBD.

力のつりあいより

$$R_{\mathrm{A}} - 2pL - pL = 0 \qquad \therefore R_{\mathrm{A}} = 3pL \tag{2.5}$$

A 点まわりのモーメントのつりあいより

$$-M_{\mathrm{A}} + 2pL \cdot L + pL^2 + \int_{2L}^{3L} px dx = 0 \qquad \therefore M_{\mathrm{A}} = \frac{11}{2} pL^2 \tag{2.6}$$

**(4) はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$を求め，SFD と BMD を描け．**

(i) $0 \le x < L$

図 2.3 に FBD を示す.

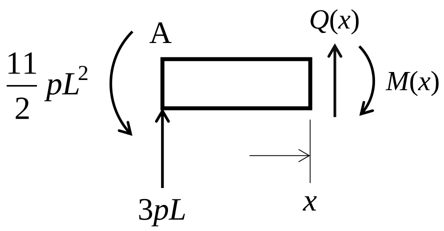



Fig. 2.3 FBD ($0 \le x < L$).

力のつりあいより

$$3pL + Q(x) = 0 \quad \therefore Q(x) = -3pL \tag{2.7}$$

A 点まわりのモーメントのつりあいより

$$-\frac{11}{2} pL^2 - Q(x) \cdot x + M(x) = 0 \quad \therefore M(x) = -3pLx + \frac{11}{2} pL^2 \tag{2.8}$$

(ii) $L < x < 2L$

図 2.4 に FBD を示す.

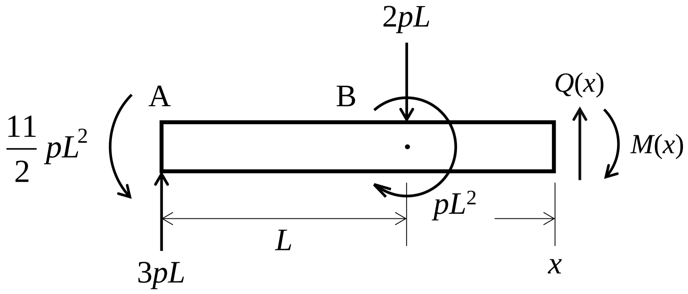



Fig. 2.4 FBD ( $L < x < 2L$ ).

力のつりあいより

$$3pL - 2pL + Q(x) = 0 \quad \therefore Q(x) = -pL \tag{2.9}$$

A 点まわりのモーメントのつりあいより

$$-\frac{11}{2}pL^2 + 2pL \cdot L + pL^2 - Q(x) \cdot x + M(x) = 0 \quad \therefore M(x) = -pLx + \frac{5}{2}pL^2 \tag{2.10}$$

(iii) $2L < x \leq 3L$

図 2.5 に FBD を示す.

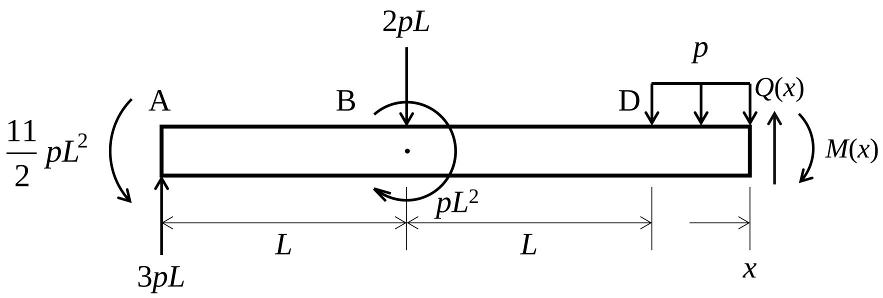



Fig. 2.5 FBD ( $2L < x \leq 3L$ ).

力のつりあいより

$$3pL - 2pL - p \cdot (x - 2L) + Q(x) = 0 \quad \therefore Q(x) = px - 3pL \tag{2.11}$$

A 点まわりのモーメントのつりあいより

$$\begin{gathered} -\frac{11}{2}pL^2 + 2pL \cdot L + pL^2 + \int_{2L}^{x} px' dx' - Q(x) \cdot x + M(x) = 0 \\ \therefore M(x) = \frac{p}{2}x^2 - 3pLx + \frac{9}{2}pL^2 \end{gathered} \tag{2.12}$$

(i), (ii), (iii)をまとめて

$$Q(x)=\begin{cases}-3pL & (0\le x<L)\\ -pL & (L<x<2L)\\ px-3pL & (2L<x\le 3L)\end{cases} \tag{2.13}$$

$$M(x)=\begin{cases}-3pLx+\dfrac{11}{2}pL^2 & (0\le x<L)\\ -pLx+\dfrac{5}{2}pL^2 & (L<x<2L)\\ \dfrac{p}{2}x^2-3pLx+\dfrac{9}{2}pL^2 & (2L<x\le 3L)\end{cases} \tag{2.14}$$

式(2.13)，(2.14)より SFD，BMD は図 2.6，2.7 のようになる．

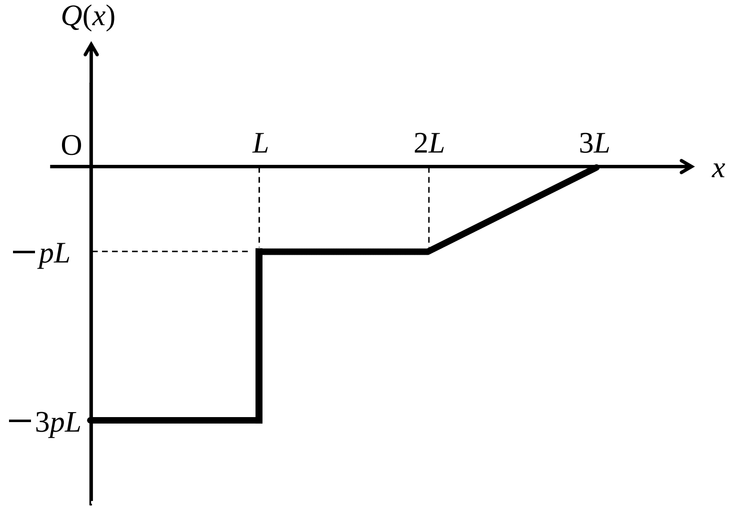



Fig. 2.6 SFD.

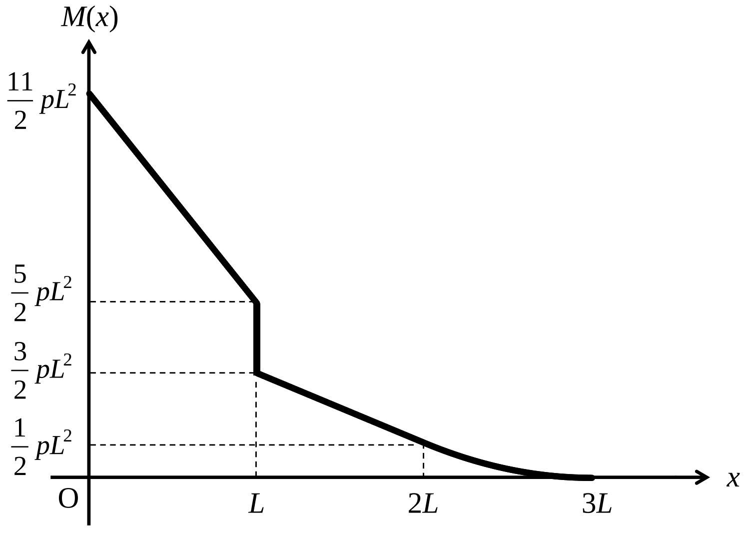



Fig. 2.7 BMD.

**(5) $a$=5[mm]，$p$=25[N/mm]，$L$=47[mm]のとき，はりに生じる最大曲げ応力$\sigma_{\max}$を求めよ．**

はりに生じる曲げ応力は

$$\sigma = \frac{M(x)}{I_z} y \tag{2.15}$$

で表される．図 2.7 からはりに生じる曲げモーメントは $x$=0 で最大となり，また図 4 より $y_{\max}=\pm 3a$ であることから

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \left|\frac{M(x)}{I_z} y\right|_{y=y_{\max}} = \frac{11}{2} pL^2 \cdot \frac{1}{94a^4} \cdot 3a \\ &= \frac{11 \cdot 25 \cdot 47^2 \cdot 3}{2 \cdot 94 \cdot 5^3} = 77.55 \cong 77.6 \quad \text{[MPa]}\end{aligned} \tag{2.16}$$

となる．