※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みレポートは次回演習時に返却．

材料の力学 1　Step2　第 8 回演習問題 (2017/6/20 実施)

[1] 図 1 に示すように，外径 $3d$，内径 d，長さ L の中空円筒 1 と，外径 $2d$，内径 d，長さ L の中空円筒 2 が C 点において剛体円盤で接合され，それぞれの他端は剛体壁により固定されている．剛体円盤 C にはねじりモーメント T が作用している．中空円筒 1, 2 の横弾性係数がともに G であるとき以下の問いに答えなさい．なお，剛体円盤の厚さは無視できるものとする．

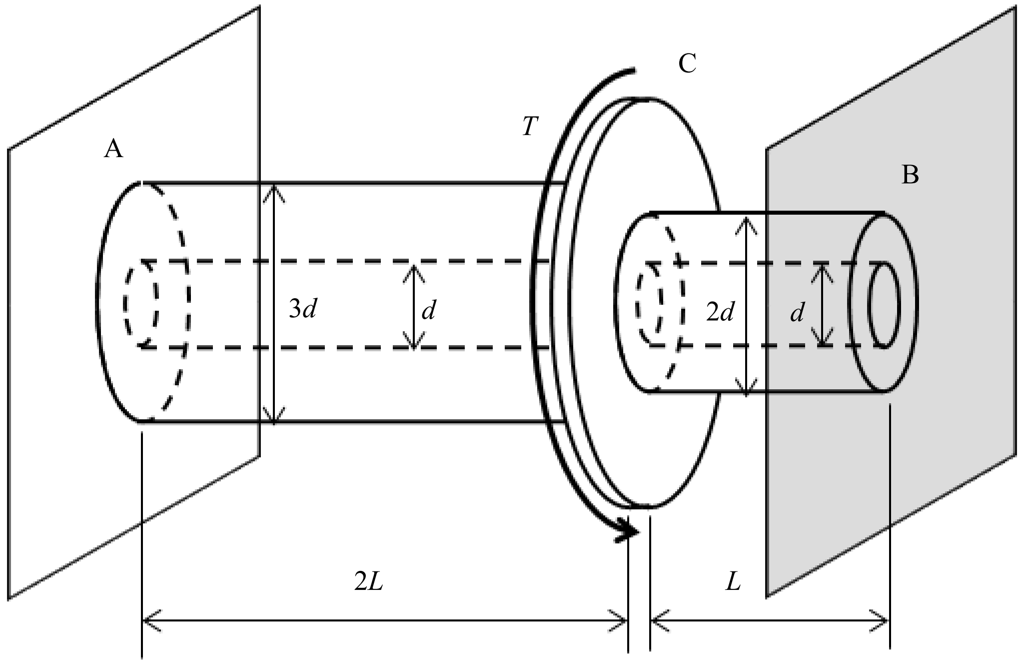


Fig. 1 中空円筒材.

(1) AC 間，CB 間に生じるねじれ角 φ_{AC}, φ_{CB} を，A, B において生じる反モーメント M_A, M_B を用いて表せ．

(2) M_A, M_B を T を用いて表せ．

(3) 中空円筒 1，2 に生じるせん断応力をそれぞれ求め、AB 間で生じる最大せん断応力 τ_{max} を求めよ．

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みレポートは次回演習時に返却．

[1]

(1) **AC 間，CB 間に生じるねじれ角** φ_{AC}, φ_{CB} **を，A, B において生じる反モーメント** M_A, M_B **を用いて表せ．**

中空円筒 1,2 の FBD は図 1.1 のようになる．

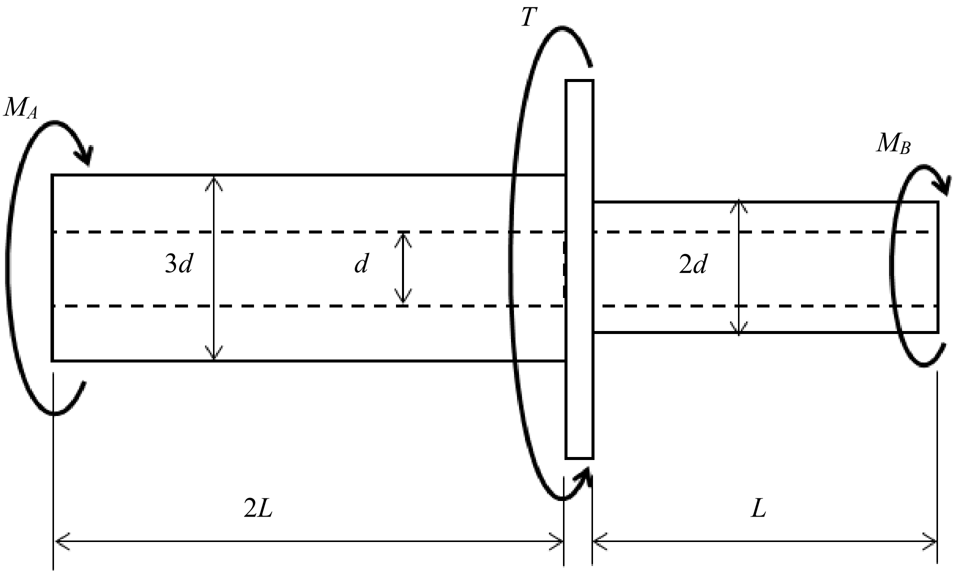


Fig. 1.1 FBD.

A 面の中空円筒 1 の中心を原点に取ると，FBD よりモーメントの釣り合い式は以下のようになる．

$$T - M_A - M_B = 0 \tag{1.1}$$

中空円筒 1,2 の断面二次極モーメントをそれぞれ I_1, I_2 とすると，以下のように表される．

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_A r^2 dA = \int_{d/2}^{3d/2} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}d\right)^4 - \left(\frac{1}{2}d\right)^4\right\} = \frac{5}{2}\pi d^4 \\ I_2 &= \int_A r^2 dA = \int_{d/2}^{d} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2}\left\{d^4 - \left(\frac{1}{2}d\right)^4\right\} = \frac{15}{32}\pi d^4 \end{aligned} \tag{1.2}$$

原点からの距離 x におけるねじりモーメントは以下のように計算することが出来る．

(i) $0 \le x \le 2L$ のとき

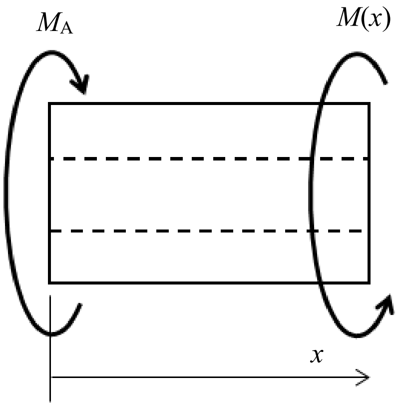


Fig. 1.2 FBD.

$$\begin{aligned} M(x) - M_A &= 0 \\ M(x) &= M_A \end{aligned} \tag{1.3}$$

(ii) $2L \le x \le 3L$ のとき

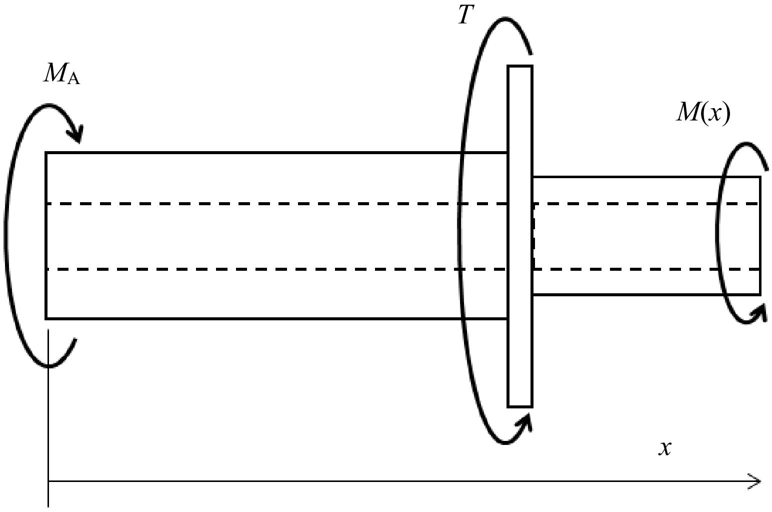


Fig. 1.3 FBD.

$$\begin{aligned} -M_A + T + M(x) &= 0 \\ M(x) &= M_A - T \end{aligned} \tag{1.4}$$

以上よりねじれ角 φ_{AC}, φ_{CB} は以下のように求まる．

$$\varphi_{\mathrm{AC}} = \frac{M(x)2L}{GI_1} = \frac{4M_{\mathrm{A}}L}{5\pi Gd^4}$$
$$\varphi_{\mathrm{CB}} = \frac{M(x)L}{GI_2} = \frac{32(M_A - T)L}{15\pi Gd^4} \tag{1.5}$$

(2) **M_{A}, M_{B} を T を用いて表せ.**

両端が壁により固定されているため, 部材全体でのねじれ角は 0 となる. これよりねじれ角について以下の条件が成り立つ.

$$\varphi_{\mathrm{AC}} + \varphi_{\mathrm{CB}} = 0 \tag{1.6}$$

式(1.6)に式(1.5)を代入すると,

$$\frac{4M_{\mathrm{A}}L}{5\pi Gd^4} + \frac{32(M_A - T)L}{15\pi Gd^4} = 0 \tag{1.7}$$

また, 式(1.7)に式(1.1)を代入し M_A について整理すると,

$$\frac{4M_{\mathrm{A}}L}{5\pi Gd^4} + \frac{32(M_A - T)L}{15\pi Gd^4} = 0$$
$$\frac{44LM_A}{15\pi Gd^4} = \frac{32LT}{15\pi Gd^4} \tag{1.8}$$
$$M_A = \frac{8}{11}T$$

となる. これを式(1.1)に代入し, M_B について整理すると,

$$M_B = \frac{3}{11}T \tag{1.9}$$

となる.

(3) **中空円筒 1, 2 に生じるせん断応力をそれぞれ求め、AB 間で生じる最大せん断応力 $\tau_{\max}$ を求めよ.**

最大せん断応力 $\tau_{\max}$ は部材における最大せん断ひずみを $\gamma_{\max}$ とすれば次式で表される.

$$\tau_{\max} = G\gamma_{\max} \tag{1.10}$$

またせん断ひずみ γ はねじれ角 φ, 部材の長さ L, 中心からの距離 r を用いて以下の式で表される.

$$\gamma = \frac{\varphi r}{L} \tag{1.11}$$

最大せん断応力は部材表面において生じると考えられる. 中空円筒 1 については, 式(1.10)に式(1.11), (1.5), (1.8)を代入すると以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}\tau_{\max\_1} &= Gr\frac{\varphi}{2L} \\ &= Gr\frac{4LM_A}{10\pi Gd^4 L} \\ &= G\frac{3d}{2}\frac{4}{10\pi Gd^4}\frac{8}{11}T \\ &= \frac{24T}{55\pi d^3}\end{aligned} \tag{1.12}$$

中空円筒 2 についても同様に考えると，

$$\begin{aligned}\tau_{\max\_2} &= Gr\frac{\varphi_{CB}}{L} \\ &= -Gr\frac{32LM_B}{15\pi Gd^4 L} \\ &= -Gd\frac{32}{15\pi Gd^4}\frac{3}{11}T \\ &= -\frac{32T}{55\pi d^3}\end{aligned} \tag{1.13}$$

以上より最大せん断応力は中空円筒 2 で生じ，

$$\tau_{\max} = \left|-\frac{32T}{55\pi d^3}\right| = \frac{32T}{55\pi d^3} \tag{1.14}$$

となる．

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みレポートは次回演習時に返却．

[2] 右端に直径 $2d$ の剛体円盤が取り付けられた，直径 d，$2d$ をもつ薄肉円筒材が点 A で剛体フランジを介して接続されている． $0 \le x < L$ の範囲では分布モーメント q が作用しており，右端の剛体円盤には図のように外力 P が対称に作用している．このとき，以下の問いに答えよ．薄肉円筒材の横弾性係数は G とし，肉厚 t は円筒材の直径と比べて十分に小さいものとする($t << d$)．

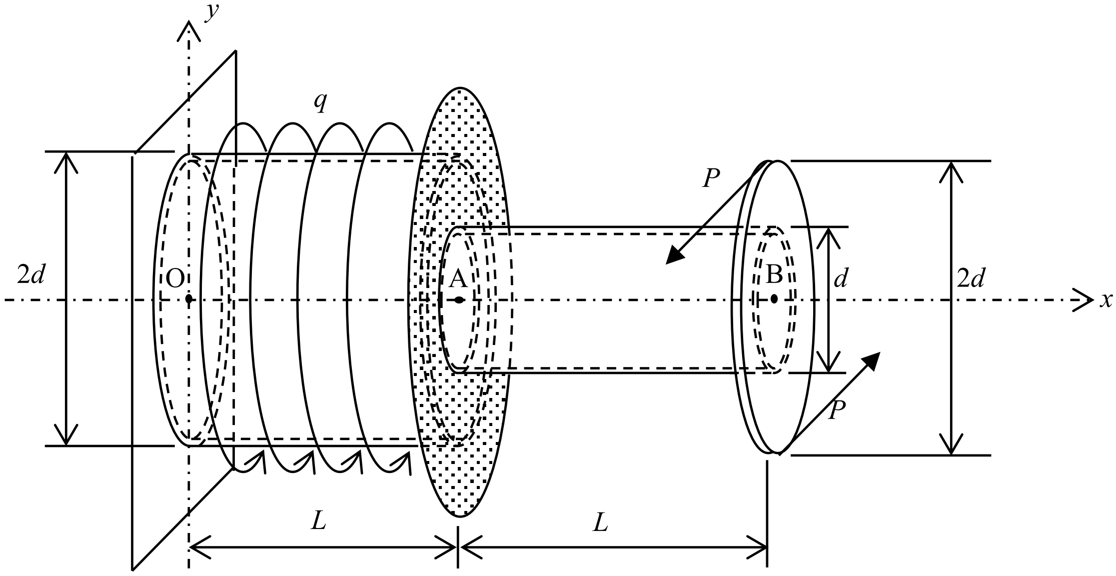


Fig. 2 薄肉円筒材.

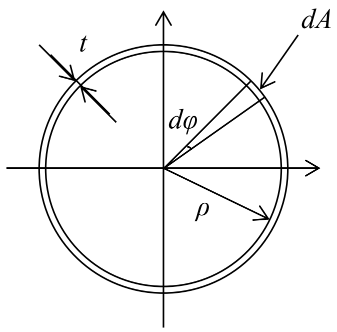


Fig. 3 薄肉材における微小面積.

(1) 図 3 を参考に OA 間，AB 間の断面二次極モーメント I_{pOA}，I_{pAB} を求めよ．

(2) 薄肉円筒材の FBD を描き，点 O における反モーメント M_O を求めよ．

(3) ねじりモーメント M の x 軸方向分布を図示せよ．

(4) 薄肉円筒材表面に生じるせん断応力 τ の x 軸方向分布を図示せよ．ただし $qL > 6Pd$ とする．

(5) 薄肉円筒材の許容せん断応力が $\tau_a = 100$ [MPa]であるとき，肉厚 t をいくら以上にすればよいか答えよ．ただし，$P = 370$ [N]，$q = 600$ [Nm/m]，$L = 200$ [mm]，$d = 50$ [mm]とする．

<u>※解答の導出過程がないレポートは認めない．</u>
<u>採点済みレポートは次回演習時に返却．</u>

[2]

(1)　**OA 間，AB 間の断面二次極モーメント $I_{p\mathrm{OA}}$，$I_{p\mathrm{AB}}$ を求めよ．**

薄肉円筒材の断面二次極モーメント I_p は，

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} \rho^3 t d\phi = 2\pi\rho^3 t \tag{2.1}$$

と求められる．

(i)　$0 \le x \le L$

　半径が d であるため断面二次極モーメント I_p は，

$$I_{p\mathrm{OA}} = 2\pi d^3 t \tag{2.2}$$

と表される．

(ii)　$L \le x \le 2L$

　半径が $d/2$ であるため断面二次極モーメント I_p は，

$$I_{p\mathrm{AB}} = \frac{1}{4}\pi d^3 t \tag{2.3}$$

と表される．

(2)　**薄肉円筒材の FBD を描き，点 O における反モーメント M_O を求めよ．**

薄肉円筒材の FBD は以下のようになる．

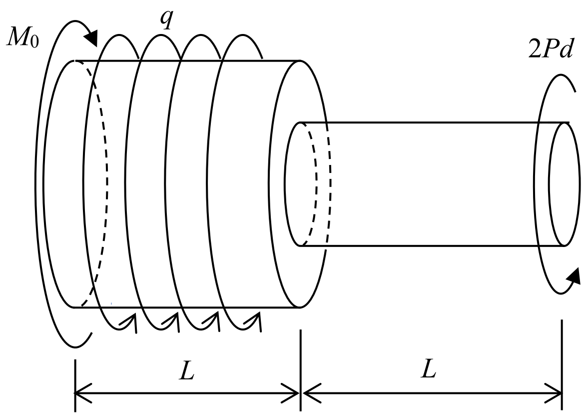


Fig. 2.2 FBD.

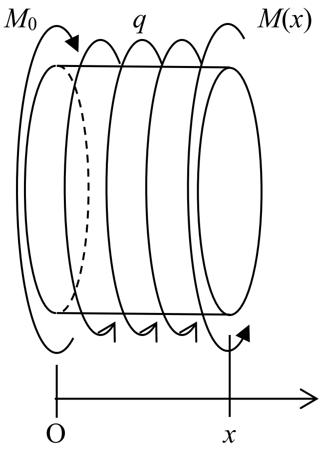
FBD を参考にモーメントのつり合い式を立てると，以下のようになる．

$$\begin{gathered} -M_0 + qL + 2Pd = 0 \\ \therefore M_0 = qL + 2Pd \end{gathered} \tag{2.4}$$

(3)　**ねじりモーメント *M* の *x* 軸方向分布を図示せよ．**

原点からの距離 x における仮想断面でのねじりモーメントは以下のように計算できる．

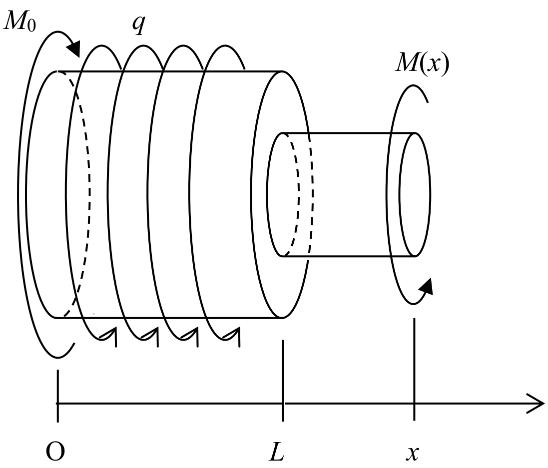
(i)　$0 \le x < L$



$$-M_0 + qx + M(x) = 0$$
$$\therefore M(x) = M_0 - qx = 2Pd + q(L-x) \tag{2.5}$$

Fig. 2.3　仮想断面($0 \le x < L$).

(ii)　$L < x \le 2L$



$$-M_0 + qL + M(x) = 0$$
$$\therefore M(x) = M_0 - qL = 2Pd \tag{2.6}$$

Fig. 2.4　仮想断面($L < x \le 2L$).

以上より，ねじりモーメント M の x 軸方向分布は次のように図示される．

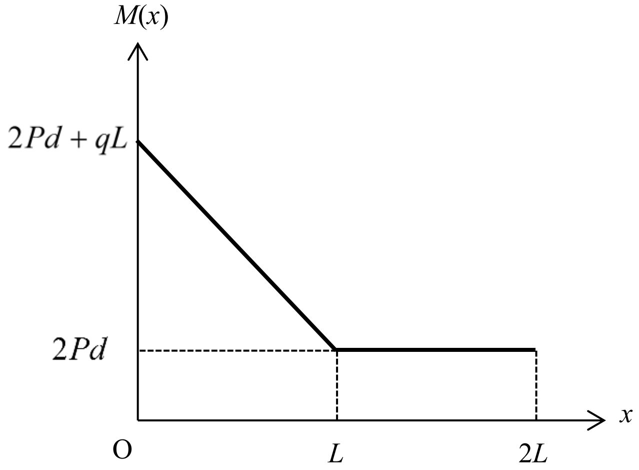


Fig. 2.5　ねじりモーメントの x 軸方向分布.

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みレポートは次回演習時に返却．

(4) **薄肉円筒材表面に生じるせん断応力 $\boldsymbol{\tau}$ の $\boldsymbol{x}$ 軸方向分布を図示せよ．ただし $\boldsymbol{qL > 6Pd}$ とする．**

丸棒断面において，中心から半径 ρ の位置に作用するせん断応力 τ は次のように表される．

$$\tau = \frac{M}{I_p}\rho \tag{2.7}$$

以上より，原点からの距離 x における薄肉円筒材表面に生じるせん断応力 τ は以下のように計算できる．

(i) $0 \le x \le L$

式(2.2)，(2.5)，(2.7)より，

$$\tau = \frac{2Pd + q(L-x)}{2\pi d^3 t}\cdot d = \frac{2Pd + q(L-x)}{2\pi d^2 t} \tag{2.8}$$

(ii) $L \le x \le 2L$

式(2.3)，(2.6)，(2.7)より，

$$\tau = \frac{2Pd}{\pi d^3 t/4}\cdot\frac{d}{2} = \frac{4P}{\pi dt} \tag{2.9}$$

以上より $qL > 6Pd$ に注意すると，せん断応力 τ の x 軸方向分布は次のように図示される．

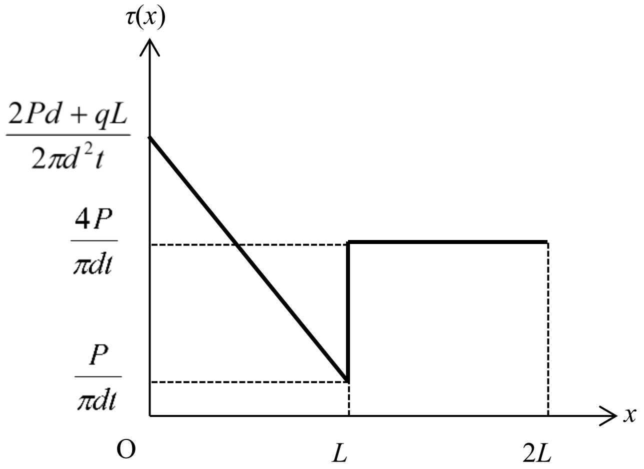


Fig. 2.6 せん断応力の x 軸方向分布．

(5) **薄肉円筒材の許容せん断応力が $\boldsymbol{\tau_a}$ = 100 [MPa]であるとき，肉厚 $\boldsymbol{t}$ をいくら以上にすればよいか答えよ．ただし，$\boldsymbol{P}$ = 370 [N]，$\boldsymbol{q}$ = 600 [N]，$\boldsymbol{L}$ = 200 [mm]，$\boldsymbol{d}$ = 50 [mm]とする．**

図 2.3 より最大せん断応力 τ_{max} は $x = 0$，つまり左端において生じ，その大きさは

$$\tau_{max} = \frac{2Pd + qL}{2\pi d^2 t} \tag{2.10}$$

となる．式(2.10)に値を代入して計算すると，次のように求まる．

$$\tau_a > \tau_{\max}$$
$$100 > \frac{2 \cdot 370 \cdot 50 + 600 \cdot 200}{2 \cdot \pi \cdot 50^2 \cdot t} \tag{2.11}$$
$$\therefore t > 0.0999\cdots \cong 0.10\,[\mathrm{mm}]$$