

材料の力学 1 Step2 第7回演習問題(2017/6/13 実施)

- [1] 図1のような両端が壁に固定された段付き丸棒がある。(a)では棒のB($x=L$)に $4T$, C($x=2L$)に $5T$ のねじりモーメントが, (b)では棒の点 B'C'間($L \leq x \leq 2L$)に t の一様分布ねじりモーメントがそれぞれ図に示すように作用している。以下の問いに答えよ。ただし横弾性係数は G とし, 曲げモーメントは x 軸に対して右ねじの方向を正方向として答えよ。

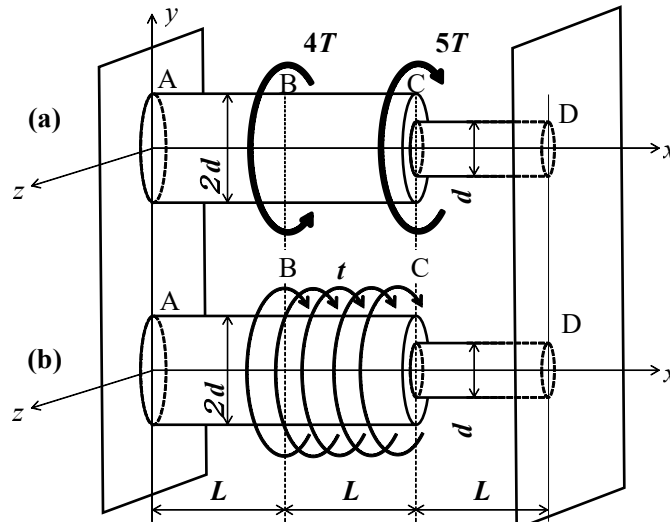


Fig.1 両端が壁に固定された段付き丸棒

- (1) AC 部 (A'C'部) の断面 2 次極モーメント I_{p1} , CD 部 (C'D'部) の断面 2 次極モーメント I_{p2} を求めよ。

図 1(a)について以下の問いに答えよ。

- (2) 図 1(a)の部材の FBD を描き, 点 A, 点 D における壁からの反モーメントをそれぞれ M_A , M_D として, モーメントのつり合い式を示せ。
- (3) M_A を用いて AB 間に生じるねじれ角 ϕ_{AB} , BC 間に生じるねじれ角 ϕ_{BC} , CD 間に生じるねじれ角 ϕ_{CD} を求めよ。
- (4) 右端の壁による拘束条件 ($\phi_{AD}=0$) を用いて, 点 A, 点 D における壁からの反モーメント M_A , M_D を求め, 曲げモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示せよ。

図 1(b)について以下の問いに答えよ。

- (5) 壁からの反モーメントをそれぞれ $M_{A'}$, $M_{D'}$ としてモーメントのつり合い式を示せ。
- (6) $M_{A'}$ を用いて A'B'間に生じるねじれ角 $\phi_{A'B'}$, B'C'間に生じるねじれ角 $\phi_{B'C'}$, C'D'間に生じるねじれ角 $\phi_{C'D'}$ を求めよ。
- (7) 点 A', 点 D'における壁からの反モーメント $M_{A'}$, $M_{D'}$ を求め, $M(x)$ を図示せよ。

※ねじれ角:
$$\phi = \int \frac{M(x)}{GI_p} dx$$

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

[1]

(1) AC 部 (A'C'部) の断面 2 次極モーメント I_{p1} , CD 部 (C'D'部) の断面 2 次極モーメント I_{p2} を求めよ.

AC 部 (A'C'部) の断面 2 次極モーメント I_{p1} , CD 部 (C'D'部) の断面 2 次極モーメント I_{p2} は以下のように求まる.

$$I_{p1} = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^d r^3 dr = \frac{1}{2} \pi d^4 \quad (1.1)$$

$$I_{p2} = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{1}{32} \pi d^4 \quad (1.2)$$

図 1(a)について以下の問いに答えよ.

(2) 図 1(a)の部材の FBD を描き, 点 A, 点 D における壁からの反モーメントをそれぞれ M_A , M_D として, モーメントのつり合い式を示せ.

点 A, 点 D における壁からの反モーメント M_A , M_D を用いて FBD を描くと次のようになる.

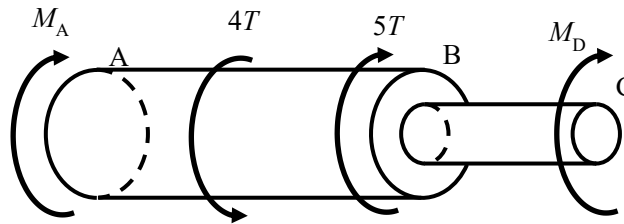


Fig. 1.1 FBD

図 1.1 において, モーメントのつり合い式は次のようになる.

$$-M_A + 4T - 5T - M_D = 0 \quad \therefore M_A + M_D + T = 0 \quad (1.3)$$

※解答の導出過程がないレポートは認めない。
採点済みレポートは次回演習時に返却。

(3) M_A を用いて AB 間に生じるねじれ角 ϕ_{AB} , BC 間に生じるねじれ角 ϕ_{BC} , CD 間に生じるねじれ角 ϕ_{CD} を求めよ.

FBD を利用して AB 間, BC 間それぞれについて, まず作用しているねじりモーメント $M(x)$ を求めてからねじれ角 $\phi(x)$ を求める.

(i) $0 \leq x \leq L$ のとき

ねじりモーメントを $M(x)$ とすると, 作用する力は下図のようになる.

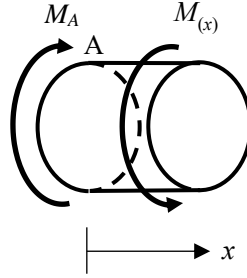


Fig. 1.2 FBD (AB 間)

モーメントのつり合い式より, ねじりモーメント $M(x)$ は次のようになる.

$$-M_A + M(x) = 0 \quad \therefore M(x) = M_A \quad (1.4)$$

よって ϕ_{AB} は(1)の結果を利用して以下のように求まる.

$$\phi_{AB} = \int \frac{M(x)}{GI_{p1}} dx = \frac{2M_A L}{\pi G d^4} \quad (1.5)$$

(ii) $L \leq x \leq 2L$ のとき

ねじりモーメントを $M(x)$ とすると, 作用する力は下図のようになる.

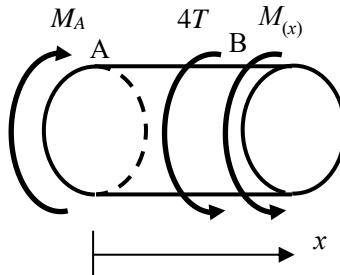


Fig. 1.3 FBD (BC 間)

モーメントのつり合い式より, ねじりモーメント $M(x)$ は次のようになる

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

$$-M_A + 4T + M(x) = 0 \quad \therefore M(x) = -4T + M_A \quad (1.6)$$

よって ϕ_{BC} は(1)の結果を利用して以下のように求まる.

$$\phi_{BC} = \int \frac{M(x)}{GI_{p1}} dx = \frac{2L}{\pi G d^4} (-4T + M_A) \quad (1.7)$$

(iii) $2L \leq x \leq 3L$ のとき

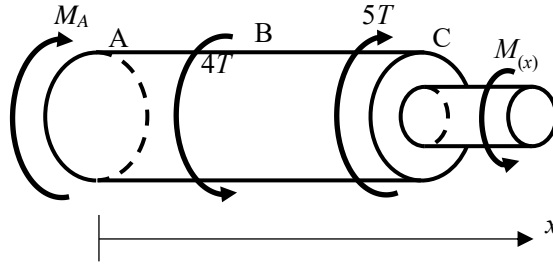


Fig. 1.4 FBD (CD 間)

モーメントのつり合い式より, ねじりモーメント $M(x)$ は次のようになる.

$$-M_A + 4T - 5T + M(x) = 0 \quad \therefore M(x) = T + M_A \quad (1.8)$$

よって ϕ_{CD} は(1)の結果を利用して以下のように求まる.

$$\phi_{CD} = \int \frac{M(x)}{GI_{p2}} dx = \frac{32L}{\pi G d^4} (T + M_A) \quad (1.9)$$

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

- (4) 右端の壁による拘束条件 ($\phi_{AD}=0$) を用いて, 点 A, 点 D における壁からの反モーメント M_A , M_D を求め, 曲げモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示せよ.

以上の式 (1.5), (1.7), (1.9) より ϕ_{AD} は以下のようなになる.

$$\phi_{AD} = \phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CD} = \frac{L}{\pi G d^4} (24T + 36M_A) \quad (1.10)$$

両端固定であるため全体のねじれ角が 0 となる拘束条件 ($\phi_{AD}=0$) とつり合い式(1.3)より

$$\begin{aligned} 24T &= 36M_A \Leftrightarrow M_A = -\frac{2}{3}T \\ M_D &= -T - M_A = -\frac{1}{3}T \end{aligned} \quad (1.11)$$

したがって, ねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示すると下図のようになる.

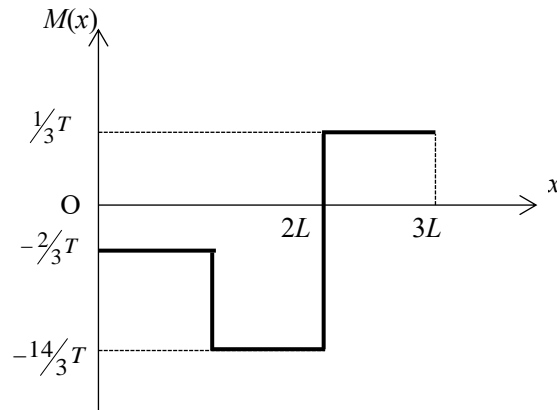


Fig. 1.5 ねじりモーメント M の x 方向分布

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

図 1(b)について以下の問いに答えよ.

(5) 壁からの反モーメントをそれぞれ $M_{A'}$, $M_{D'}$ としてモーメントのつり合い式を示せ.

点 A', 点 D' における壁からの反モーメント $M_{A'}$, $M_{D'}$ を用いて FBD を描くと次のようになる.

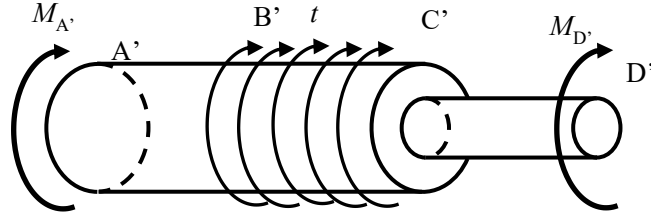


Fig. 1.6 FBD

図 1.1 において, モーメントのつり合い式は次のようになる.

$$-M_{A'} - tL - M_{D'} = 0 \quad \therefore M_{A'} + M_{D'} + tL = 0 \quad (1.12)$$

(6) $M_{A'}$ を用いて A'B' 間に生じるねじれ角 $\phi_{A'B'}$, B'C' 間に生じるねじれ角 $\phi_{B'C'}$, C'D' 間に生じるねじれ角 $\phi_{C'D'}$ を求めよ

FBD を利用して A'B' 間, B'C' 間 C'D' 間それぞれについて, まず作用しているねじりモーメント $M(x)$ を求めてからねじれ角 $\phi(x)$ を求める.

(i) $0 \leq x \leq L$ のとき

ねじりモーメントを $M(x)$ とすると, 作用する力は下図のようになる.

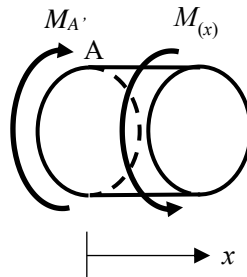


Fig. 1.7 FBD (A'B'間)

モーメントのつり合い式より, ねじりモーメント $M(x)$ は次のようになる.

$$-M_{A'} + M(x) = 0 \quad \therefore M(x) = M_{A'} \quad (1.13)$$

よって $\phi_{A'B'}$ は(1)の結果を利用して以下のように求まる.

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

$$\phi_{A'B'} = \int \frac{M(x)}{GI_{p1}} dx = \frac{2M_{A'}L}{\pi Gd^4} \quad (1.14)$$

(ii) $L \leq x \leq 2L$ のとき

ねじりモーメントを $M(x)$ とすると、作用する力は下図のようになる.

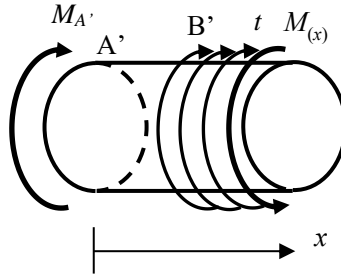


Fig. 1.8 FBD (B'C'間)

モーメントのつり合い式より、ねじりモーメント $M(x)$ は次のようになる

$$-M_{A'} - t(x - L) + M(x) = 0 \quad \therefore M(x) = tx + M_{A'} - tL \quad (1.15)$$

よって $\phi_{B'C'}$ は(1)の結果を利用して以下のように求まる.

$$\begin{aligned} \phi_{B'C'} &= \int \frac{M(x)}{GI_{p1}} dx = \frac{2}{\pi Gd^4} \int_L^{2L} \{tx + M_{A'} - tL\} dx \\ &= \frac{2}{\pi Gd^4} \left[\frac{t}{2} x^2 + (M_{A'} - tL)x \right]_L^{2L} = \frac{L}{\pi Gd^4} (tL + 2M_{A'}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

(iii) $2L \leq x \leq 3L$ のとき

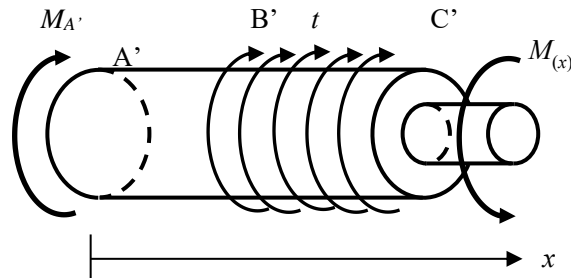


Fig. 1.9 FBD (C'D'間)

モーメントのつり合い式より、ねじりモーメント $M(x)$ は次のようになる.

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

$$-M_{A'} - tL + M(x) = 0 \quad \therefore M(x) = tL + M_{A'} \quad (1.17)$$

よって $\phi_{C'D'}$ は(1)の結果を利用して以下のように求まる.

$$\phi_{C'D'} = \int \frac{M(x)}{GI_{p2}} dx = \frac{32L}{\pi G d^4} (tL + M_{A'}) \quad (1.18)$$

(7) 点 A', 点 D'における壁からの反モーメント $M_{A'}$, $M_{D'}$ を求め, $M(x)$ を図示せよ.

以上の式 (1.14), (1.16), (1.18)より $\phi_{A'D'}$ は以下のようになる.

$$\phi_{A'D'} = \phi_{A'B'} + \phi_{B'C'} + \phi_{C'D'} = \frac{L}{\pi G d^4} (33tL + 36M_{A'}) \quad (1.19)$$

両端固定であるため全体のねじれ角が 0 となる拘束条件 ($\phi_{A'D'}=0$) およびつり合い式(1.12)より

$$\begin{aligned} 33tL &= -36M_{A'} \Leftrightarrow M_{A'} = -\frac{11}{12}tL \\ M_{D'} &= tL + M_{A'} = \frac{1}{12}tL \end{aligned} \quad (1.20)$$

したがって, ねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示すると下図のようになる.

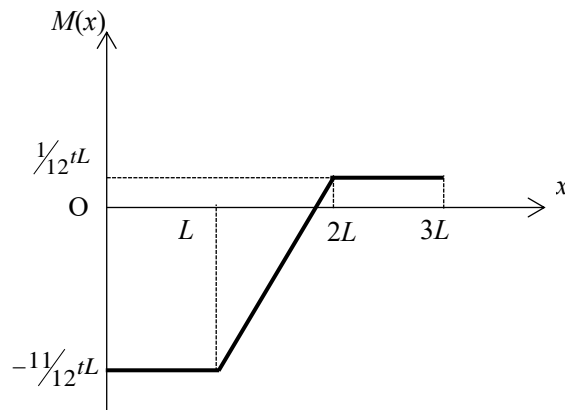


Fig. 1.10 ねじりモーメント M の x 方向分布

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

- [2] 下図のように直径 d 、長さ l の釘が壁に打ち込まれている。今この釘の頭をペンチでねじったところ、釘の頭は回転した。この時、釘の先端は回転していないものとし、釘と壁の間には単位面積当たりの摩擦力 p が全体に一樣にかかっていると仮定する。なお、釘の先端の尖った部分の影響は無視できるものとし、また横弾性係数は G とする。

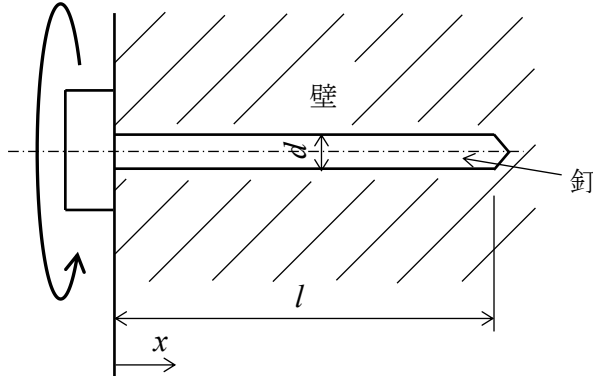


Fig.1 全体図

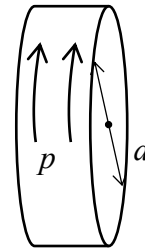


Fig.2 釘断面の拡大図

- (1) 釘表面に作用する摩擦力 p による釘の単位長さあたりのねじりモーメント $m[\text{Nm/m}]$ を求めよ。
- (2) 釘の頭にねじりモーメント M_0 が作用していると仮定する。この時の FBD を描き、モーメントのつり合い式より M_0 を求めよ。
- (3) x の位置におけるねじりモーメント $M(x)$ を M_0 を含まない形で表せ。
- (4) この時の釘の頭($x=0$)のねじれ角 ϕ を求めよ。ただし、ねじれ角 ϕ は釘の根元方向から見たときの角度とし、向き(符号)に注意すること。

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

[2]

- (1) 釘表面に作用する摩擦力 p による釘の単位長さあたりのねじりモーメント $m[\text{Nm/m}]$ を求めよ.

単位長さあたりのねじりモーメント m は、図 2 の釘断面の拡大図を参考にする以下のようなになる.

$$\begin{aligned} m &= p \times (\text{単位長さあたりの表面積}) \times (\text{腕の長さ}) \\ &= p \times \pi d \times \frac{d}{2} = \frac{\pi p d^2}{2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

- (2) 釘の頭にねじりモーメント M_0 が作用していると仮定する. この時の FBD を描き, モーメントのつり合い式より M_0 を求めよ.

摩擦によるねじりモーメント m の向きに注意して FBD を描くと以下のようなになる.

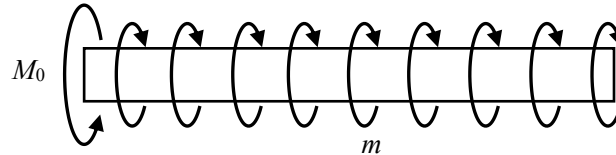


Fig.2.1 FBD

よってモーメントのつり合い式より,

$$\begin{aligned} M_0 - ml &= 0 \\ \therefore M_0 &= \frac{\pi p d^2}{2} l \end{aligned} \quad (2.2)$$

- (3) x の位置におけるねじりモーメント $M(x)$ を M_0 を含まない形で表せ.

x の位置のねじりモーメントを考えると, FBD は以下のように描ける.

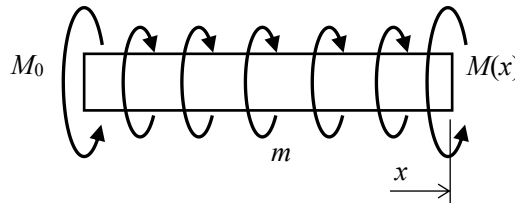


Fig.2.3 FBD

よって, モーメントのつり合い式より,

$$M_0 - mx + M(x) = 0 \quad (2.3)$$

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みレポートは次回演習時に返却.

ねじりモーメント $M(x)$ は(2)の M_0 の値を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} M(x) &= -M_0 + mx \\ &= -M_0 + \frac{\pi p d^2}{2} x = \frac{\pi p d^2}{2} (x - l) \end{aligned} \quad (2.4)$$

(4) この時の釘の頭($x=0$)のねじれ角 φ を求めよ. ただし, ねじれ角 φ は釘の根元方向から見たときの角度とし, 向き(符号)に注意すること.

釘は円形断面を持つ中実棒とみなすことができるので, 断面二次極モーメント I_x は以下の通りである.

$$I_x = \int \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.5)$$

ここで, ねじれ角 φ は比ねじれ角 θ を用いて

$$\begin{aligned} d\varphi &= \theta(x) dx \\ \Leftrightarrow \varphi &= \int \theta(x) dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

と表される. また, ねじりモーメント $M(x)$ は断面二次極モーメントと横弾性係数 G を用いると,

$$\begin{aligned} M(x) &= G\theta(x)I_x \\ \Leftrightarrow \theta(x) &= \frac{M(x)}{GI_x} \end{aligned} \quad (2.7)$$

よってねじれ角 φ は

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \theta(x) dx = \int_0^l \frac{M(x)}{GI_x} dx \\ &= \int_0^l \frac{\frac{\pi p d^2}{2} (x - l)}{G \frac{\pi d^4}{32}} dx = \int_0^l \frac{16p(x - l)}{Gd^2} dx \\ &= -\frac{8pl^2}{Gd^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

この式で求めたねじれ角は, ねじ先端から見たときの相対的な角度となっているため, 釘根元のねじれ角はねじれモーメント M_0 と同じ方向に生じることが分かる. よって, 釘根元のねじれ角 φ は

$$\varphi = \frac{8pl^2}{Gd^2} \quad (2.9)$$

と書くことができる.