

材料の力学 1 Step1 第 6 回演習問題 (2017/5/30 実施)

- [1] 図 1 は平面応力状態にある等方性弾性体のある点における応力状態を示している。なお $n-t$ 座標系は $x-y$ 座標系を反時計回りに 45° 回転した座標系である。このとき、以下の設問に答えよ。ただし弾性体の縦弾性係数を E 、横弾性係数を G 、ポアソン比を ν とする。

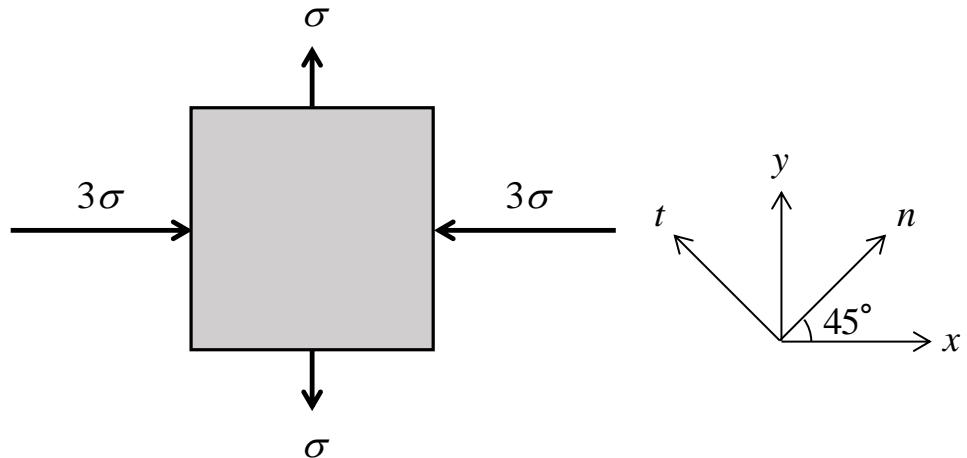


Fig. 1 等方性弾性体のある点における応力状態。

- (1) $x-y$ 座標系における応力テンソル $[\sigma_{ij}]$ を、 σ を用いて表せ。また、モールの応力円を描き、その中心と半径を示せ。
- (2) (1)で描いたモールの応力円から、 $n-t$ 座標系における応力テンソルを求めよ。
- (3) 応力-ひずみ関係式より、 $x-y$ 座標系におけるひずみテンソル $[\varepsilon_{ij}]$ を E , G , ν を用いて表せ。
- (4) モールのひずみ円を描き、その中心と半径を示せ。また、 $n-t$ 座標系におけるひずみテンソルを求めよ。
- (5) (2), (4)より、横弾性係数 G を縦弾性係数 E 、ポアソン比 ν を用いて表せ。

- (1) $x-y$ 座標系における応力テンソル $[\sigma_{ij}]$ を、 σ を用いて表せ。また、モールの応力円を描き、その中心と半径を示せ。

$x-y$ 座標系における応力テンソルは以下のようになる。

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

これより、モールの応力円は図 1.1 のようになる。

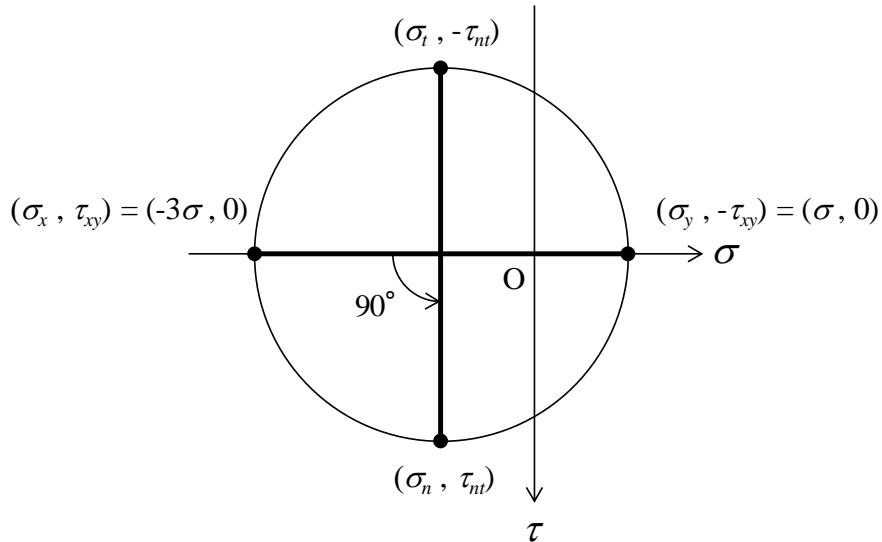


Fig. 1.1 モールの応力円。

モールの応力円の中心と半径は以下のように求められる。

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(-3\sigma + \sigma) = -\sigma \quad (1.2)$$

より

$$\text{中心} : (\sigma_c, 0) = (-\sigma, 0) \quad (1.3)$$

$$\text{半径} : r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(-3\sigma - \sigma)^2 + 0^2} = 2\sigma \quad (1.4)$$

- (2) (1)で描いたモールの応力円から、 $n-t$ 座標系における応力テンソルを求めよ。

$n-t$ 座標系は $x-y$ 座標系を反時計回りに 45° 回転させた座標系である。したがって、 $x-y$ 座標系における応力成分をモールの応力円上で反時計回りに 90° 回転させることにより、 $n-t$ 座標系における応力成分を得ることができる。図 1.1 より明らかに

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & 2\sigma \\ 2\sigma & -\sigma \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却.

- (3) 応力-ひずみ関係式より, x - y 座標系におけるひずみテンソル $[\varepsilon_{ij}]$ を E , G , ν を用いて表せ.

平面応力状態における等方性弾性体において, 応力-ひずみ関係式は以下のように表される.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (1.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (1.8)$$

これらの式に, $\sigma_x = -3\sigma$, $\sigma_y = \sigma$, $\tau_{xy} = 0$ を代入することにより,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (-3\sigma - \nu\sigma) = -\frac{\sigma}{E} (3 + \nu) \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \{\sigma - \nu \cdot (-3\sigma)\} = \frac{\sigma}{E} (1 + 3\nu) \quad (1.10)$$

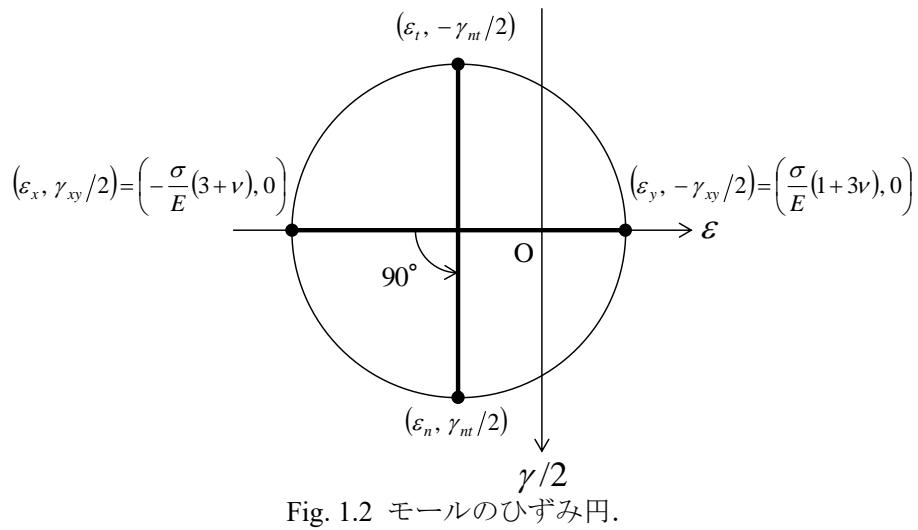
$$\gamma_{xy} = \frac{0}{G} = 0 \quad (1.11)$$

が得られ, x - y 座標系におけるひずみテンソル $[\varepsilon_{ij}]$ は以下のように表される.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{E} \begin{bmatrix} -(3+\nu) & 0 \\ 0 & (1+3\nu) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

- (4) モールのひずみ円を描き, その中心と半径を示せ. また, n - t 座標系におけるひずみテンソルを求めよ.

式(1.12)より, モールのひずみ円は図 1.2 のようになる.



※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却.

モールのひずみ円の中心と半径は以下のように求められる.

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\sigma}{E} (3 + \nu) + \frac{\sigma}{E} (1 + 3\nu) \right\} = -\frac{\sigma}{E} (1 - \nu) \quad (1.13)$$

より

$$\text{中心} : (\varepsilon_c, 0) = \left(-\frac{\sigma}{E} (1 - \nu), 0 \right) \quad (1.14)$$

$$\text{半径} : r = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ -\frac{\sigma}{E} (3 + \nu) - \frac{\sigma}{E} (1 + 3\nu) \right\}^2 + 0^2} = \frac{2\sigma}{E} (1 + \nu) \quad (1.15)$$

x-y 座標系におけるひずみ成分をモールのひずみ円上で反時計回りに 90°回転させることにより, *n-t* 座標系におけるひずみ成分を得ることができる. 図 1.2 より明らかに

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_n & \gamma_{nt}/2 \\ \gamma_{nt}/2 & \varepsilon_t \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{E} \begin{bmatrix} -(1-\nu) & 2(1+\nu) \\ 2(1+\nu) & -(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

(5)(2), (4)より, 横弾性係数 G を縦弾性係数 E , ポアソン比 ν を用いて表せ.

n-t 座標系において, 応力-ひずみ関係式より

$$\gamma_{nt} = \frac{\tau_{nt}}{G} \quad (1.17)$$

が成立する. 式(1.5), (1.16)の値を代入することにより

$$2 \cdot \frac{2\sigma}{E} (1 + \nu) = \frac{1}{G} \cdot 2\sigma \quad (1.18)$$

これを解いて

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.19)$$

が得られる.

- [2] 図に示すような両端が閉じた長さ l の薄肉円筒容器に内圧 p が作用している。円筒の内径を $2r$ 、厚さを t 、縦弾性係数を E 、ポアソン比を ν としたとき以下の問いに答えよ。なお円筒の厚さは内径に対して十分小さい($t \ll r, l$)ものとし、円筒面に沿った平面応力状態と見なしてよい。

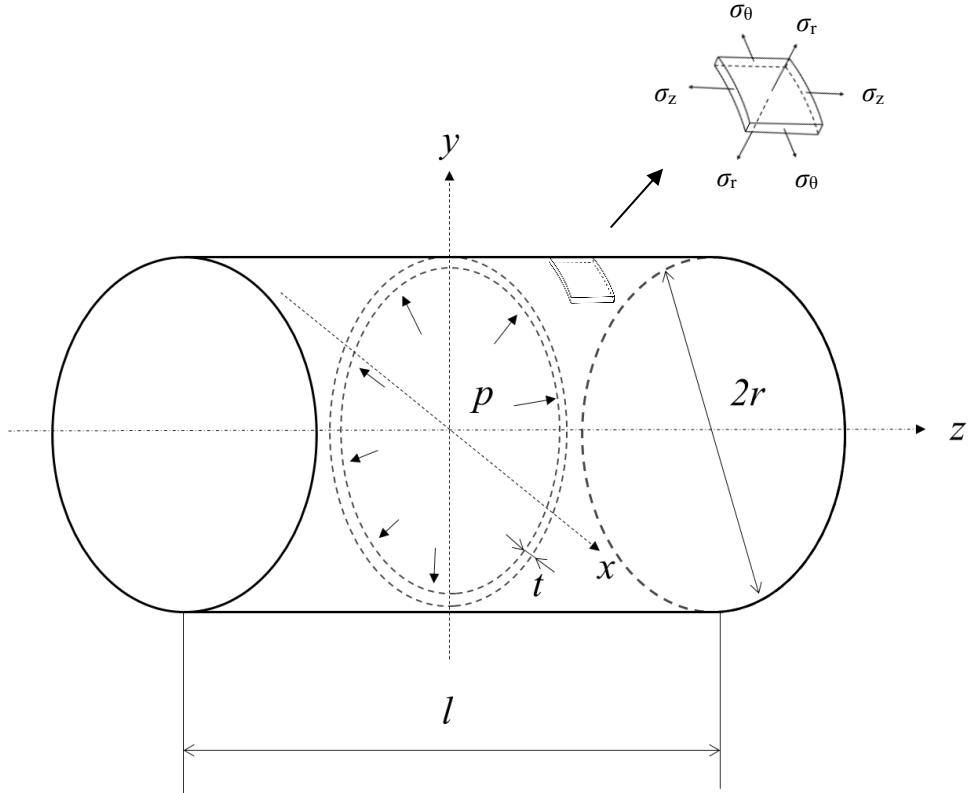


Fig.2 薄肉円筒容器。

- (1) 図 2 に示した薄肉円筒材を $x-y$ 面の仮想断面で切った場合における FBD を描き(立体的に), 釣り合いを考えることで円筒容器の軸方向に作用する応力 σ_z を求めよ。
- (2) 図 2 に示した薄肉円筒材を $z-x$ 面の仮想断面で切った場合における FBD を描き(立体的に), 釣り合いを考えることで円筒容器の円周方向に作用する応力 σ_θ について σ_z を用いて求めよ。必要であれば $\sin \theta \approx \theta$ ($\theta \ll 1$) を用いてよい。
- (3) (1), (2)で求めた値をもとに円筒容器の軸方向, 及び円周方向のひずみ ε_z , ε_θ をそれぞれ p を用いて求めよ。
- (4) 内径 120mm, 厚さ 0.3mm の薄肉円筒に内圧力を加え, 円筒中央部の軸方向ひずみを測定したら 3×10^{-5} だけ生じた。加えた内圧はいくらか。ただし, 材料の縦弾性係数を 72GPa, ポアソン比 0.3 とする。

[2]

- (1) 図 2 に示した薄肉円筒材を $x-y$ 面の仮想断面で切った場合における FBD を描き(立体的に), 釣り合いを考えることで円筒容器の軸方向に作用する応力 σ_z を求めよ.

$x-y$ 面の仮想断面で切った場合の FBD を描くと以下の図のようになる.

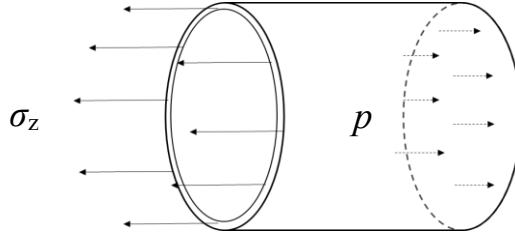


Fig.2.1 薄肉円筒容器の FBD

円筒の厚さは内径に対して十分に小さい時($t \ll r, l$), 仮想断面全体の面積 S_1 は次のように示される.

$$S_1 = \pi r^2 \quad (2.1)$$

同様にして, $t \ll r, l$ であることから薄肉部の面積 S_2 は, 以下のように示される.

$$S_2 = 2\pi rt \quad (2.2)$$

よって円筒方向の力のつり合いを考え, 軸方向応力 σ_z は次のように得られる.

$$\begin{aligned} S_1 p - S_2 \sigma_z &= 0 \\ \sigma_z &= \frac{\pi r^2}{2\pi rt} p = \frac{rp}{2t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

- (2) 図 2 に示した薄肉円筒材を $z-x$ 面の仮想断面で切った場合における FBD を描き(立体的に), 釣り合いを考えることで円筒容器の円周方向に作用する応力 σ_θ について σ_z を用いて求めよ. 必要であれば $\sin \theta \approx \theta$ ($\theta \ll 1$) を用いてよい.

$z-x$ 面の仮想断面で切った場合の FBD は以下のように示される.

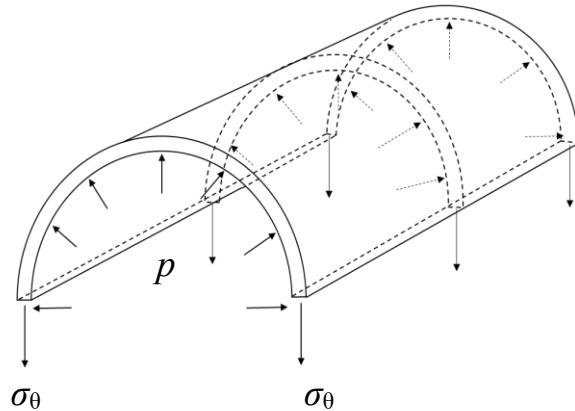


Fig.2.2 薄肉円筒容器の FBD

図に示すような円筒容器断面部の円周面に作用する力を考える。

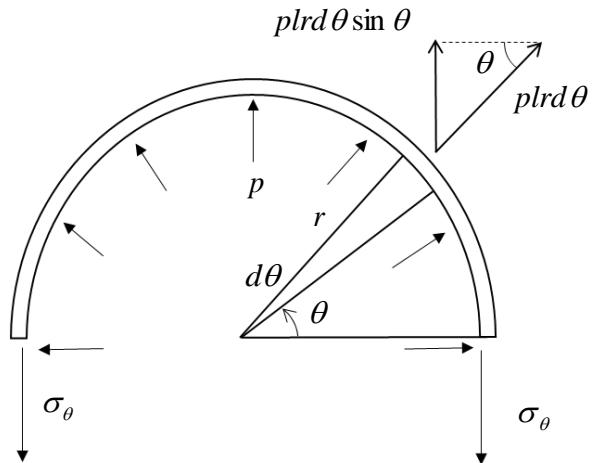


Fig.2.3 薄肉円筒容器の断面に働く力

円周面の微小面積 S_3 は,

$$S_3 = rd\theta \times l \quad (2.4)$$

また, 円周微小面積に作用する力 dP は,

$$dP = plrd\theta \sin \theta \quad (2.5)$$

と表すことができる。円周面全体に作用する力は, 式(2.5)を $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で積分することによって求まる。よって仮想断面の力のつり合い式は次のように示される。

$$\int_0^\pi plr \sin \theta d\theta - 2\sigma_\theta tl = 0 \quad (2.6)$$

$$-plr(\cos \pi - \cos 0) - 2\sigma_\theta tl = 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{rp}{t} \\ &= 2\sigma_z \end{aligned} \quad (2.8)$$

※解答の導出過程がないレポートは認めない.
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却.

- (3) (1), (2)で求めた値をもとに円筒容器の軸方向, 及び円周方向のひずみ ε_z , ε_θ をそれぞれ p を用いて求めよ.

円筒面方向の平面応力状態であるので σ_r を無視することができる. よって, 軸ひずみ ε_z は, σ_z による縦ひずみと, σ_θ による横ひずみの和で表されるので, 以下の様に示される.

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_\theta}{E} \\ &= \frac{rp}{2tE} - \nu \frac{rp}{tE} \\ &= \frac{1-2\nu}{2} \frac{rp}{tE}\end{aligned}\tag{2.9}$$

同様にして円周方向ひずみ ε_θ は次のように求められる.

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ &= \frac{rp}{tE} - \nu \frac{rp}{2tE} \\ &= \frac{2-\nu}{2} \frac{rp}{tE}\end{aligned}\tag{2.10}$$

- (4) 内径 120mm, 厚さ 0.3mm の薄肉円筒に内圧力を加え, 円筒中央部の軸方向ひずみを測定したら 3×10^{-5} だけ生じた. 加えた内圧はいくらか. ただし, 材料の縦弾性係数を 72GPa, ポアソン比 0.3 とする.

軸ひずみ ε_z は式(2.9)によって得られる. 式(2.9)を変形して,

$$p = \frac{2t}{r} \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_z\tag{2.11}$$

式(2.11)に与えられた値を代入して,

$$\begin{aligned}p &= \frac{2 \times 0.3}{60} \frac{72 \times 10^9}{1-2 \times 0.3} \times 3 \times 10^{-5} \\ &= 5.4 \times 10^4 [\text{Pa}]\end{aligned}\tag{2.12}$$