※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却．

材料の力学 1　Step1　第 5 回演習問題（2017/5/23 実施）

[1] 図 1 に示すような平行四辺形の弾性体 ABCD に $p = 10\sqrt{3}$ [MPa]の圧縮応力が図のように作用している．ただし，弾性体の板厚は十分薄いものとする．解答にあたって<u>単位をつけよ</u>.

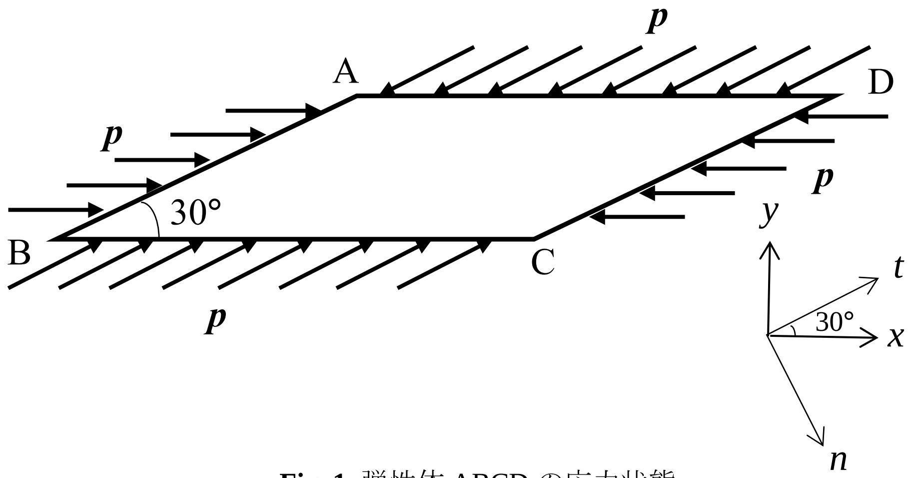


Fig. 1 弾性体 ABCD の応力状態.

(1) AD 面の垂直応力 σ_y, せん断応力 τ_{xy} および CD 面の垂直応力 σ_n, せん断応力 τ_{nt} を求めよ．

(2) モールの応力円を描け．また，モールの応力円の半径と中心の座標を求めよ．
[ヒント]　モールの応力円は座標系によらず一つに書ける．(1)から得られるモールの応力円上のプロットの位置関係を，図形的意味を捉えて考えよ．

(3) モールの応力円から応力テンソル $[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(4) 主応力 σ_1，σ_2 と主方向 θ_1, θ_2 を求めよ．ただし，主方向は x-y 座標を基準とし，$-90° \le \theta_1, \theta_2 \le 90°$ とする．

(5) 最大せん断応力 τ_{max} を求めよ．(板厚方向の主応力に注意せよ)

[1]

(1) AD 面の垂直応力σ_y，せん断応力τ_{xy}および CD 面の垂直応力σ_n，せん断応力τ_{nt}を求めよ．

x-y 平面について考える．AD 面にかかる応力ベクトル p は図 1 のように分解することが出来る． $p = 10\sqrt{3}$ [MPa]であることを踏まえて垂直応力σ_y とせん断応力τ_{xy} を求めると次の式(1.1)のようになる．

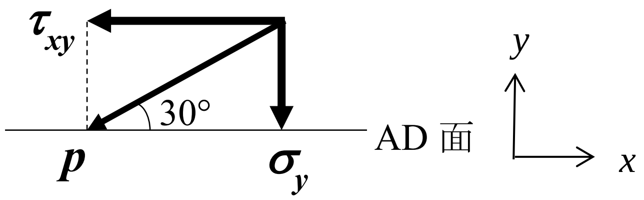


Fig.1 AD 面の応力ベクトル．

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -p\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3} = -5\sqrt{3} \\ \tau_{xy} &= -p\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\sqrt{3} = -15 \end{aligned} \quad \text{[MPa]} \tag{1.1}$$

n-t 座標系は x-y 座標系を時計回りに 60°回転させた座標系である．CD 面にかかる応力ベクトルも同様に図 2 のように分解することが出来る．垂直応力σ_n とせん断応力τ_{nt} を求めると次の式(1.2)のようになる．

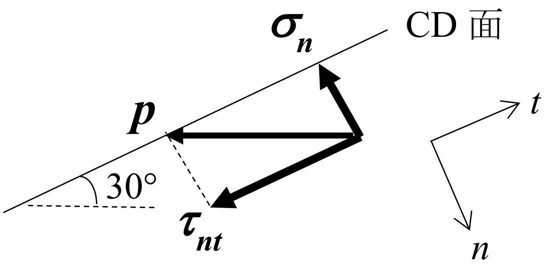


Fig.2 CD 面の応力ベクトル．

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -p\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3} = -5\sqrt{3} \\ \tau_{nt} &= -p\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\sqrt{3} = -15 \end{aligned} \quad \text{[MPa]} \tag{1.2}$$

(2)　モールの応力円を描け．また，モールの応力円の半径と中心の座標を求めよ．

(1)の結果よりモールの応力円上のプロット(σ_y , -τ_{xy})，(σ_n , τ_{nt})はそれぞれ

$$\begin{aligned}(\sigma_y, -\tau_{xy}) &= (-5\sqrt{3}, 15) \\ (\sigma_n, \tau_{nt}) &= (-5\sqrt{3}, -15)\end{aligned} \tag{1.3}$$

となる．

モールの応力円を描くために(σ_y , -τ_{xy})，(σ_n , τ_{nt})および(σ_x , τ_{xy})をプロットする．またこのときのモールの応力円の中心を C(σ_c, 0)とする．このとき，n-t 座標は x-y 座標を時計回りに 60°回転させたものであるので, モールの応力円上では時計回りに 120°回転することになる．また，(σ_x , τ_{xy})は(σ_y , -τ_{xy})を 180°回転させたものになることに注意する．

よって 3 点(σ_x , τ_{xy})，(σ_y , -τ_{xy})，(σ_n , τ_{nt})の位置関係は図 3 のようになる．

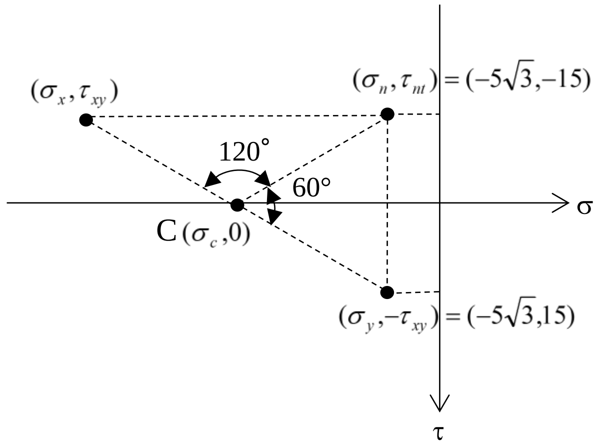


Fig.3 3 点の位置関係.

図 3 より(σ_c , 0)，(σ_y , -τ_{xy})，(σ_n , τ_{nt})の 3 点からなる三角形は正三角形になることがわかる．よってモールの応力円の半径 r は

$$r = -\tau_{xy} - \tau_{nt} = 15 - (-15) = 30 \tag{1.4}$$

これより σ_x は

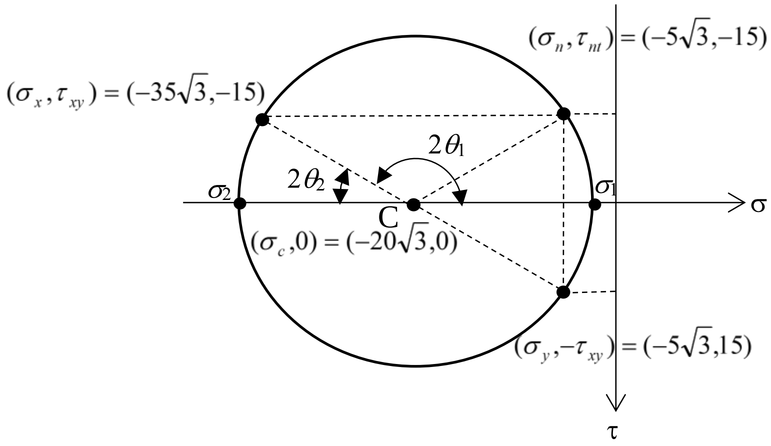
$$\sigma_x = \sigma_y - 2r\cos 30° = -5\sqrt{3} - 2 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -35\sqrt{3} \quad \text{[MPa]} \tag{1.5}$$

となる．これより $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (-35\sqrt{3}, -15)$ となるので円の中心の x 座標 σ_c は

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-35\sqrt{3} + (-5\sqrt{3})}{2} = -20\sqrt{3} \quad \text{[MPa]} \tag{1.6}$$

これよりモールの応力円の中心 C は $(\sigma_c, 0) = (-20\sqrt{3}, 0)$ となる．

以上より，モールの応力円を描くと図 4 のようになる．



半径：r =30

円の中心座標：$(\sigma_c,0) = (-20\sqrt{3},0)$

Fig.4 モールの応力円．

(3)　モールの応力円から応力テンソル$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$を求めよ．

モールの応力円より応力テンソル[$\boldsymbol{\sigma}_{ij}$]の各成分を代入して

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35\sqrt{3} & -15 \\ -15 & -5\sqrt{3} \end{pmatrix} \ \text{[MPa]} \tag{1.7}$$

(4)　主応力σ_1，σ_2 と主方向θ_1，θ_2 を求めよ．ただし，主方向は *x-y* 座標を基準とし，$-90° \le \theta_1, \theta_2 \le 90°$ とする．

主方向の角度条件に注意して，主応力σ_1，σ_2 はモールの応力円より

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_c + r \\ \sigma_2 = \sigma_c - r \end{cases} \ \text{[MPa]} \tag{1.8}$$

のように表せる．式(1.4)および式(1.6)を代入して

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20\sqrt{3}+30 \\ -20\sqrt{3}-30 \end{pmatrix} \ \text{[MPa]} \tag{1.9}$$

また，主方向θ_1 はモールの応力円より

$$\underline{\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\cdot(-15)}{-35\sqrt{3}-(-5\sqrt{5})}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 15°} \tag{1.10}$$

また主方向θ_2は，$-90° \le \theta_1, \theta_2 \le 90°$ をふまえるとモールの応力円より

$$\theta_1 = \theta_2 - 90° = 15° - 90° = -75° \tag{1.11}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75^\circ \\ 15^\circ \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

となる．

(5)　最大せん断応力τ_{max}を求めよ．

いま，x-y 平面内の主応力σ_1，σ_2はそれぞれ$(\sigma_1, \sigma_2) = (-20\sqrt{3}+30\ ,-20\sqrt{3}-30)$ となり，大小関係は$\sigma_1>\sigma_2$となる．一方，弾性体 ABCD の板厚は十分薄いため，x-y 平面の平面応力状態とみなすことができ，板厚方向の主応力は$\sigma_3 = 0$ となるが，$\sigma_3>\sigma_1$となることより，z 方向の主応力σ_3 が最大主応力となり，σ_2が最小主応力となることが分かる．
よって，最大せん断応力τ_{max}は

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left|\sigma_3 - \sigma_2\right| = 10\sqrt{3}+15 \ \ [\mathrm{MPa}] \tag{1.13}$$

[2] 板厚が十分に薄い弾性体表面のある点での応力状態を求めるため，図 2 に示すような角度でひずみゲージを貼り付けた．なお，ε_{I}は n 軸方向である．ひずみゲージから測定したひずみの値はε_{I}=356μ，$\varepsilon_{\mathrm{II}}$=156μ，$\varepsilon_{\mathrm{III}}$=156μ(μ=1.0×$10^{-6}$)であった．この弾性体の縦弾性係数 E，ポアソン比νをそれぞれ，E=182[GPa]，ν=0.3 とし，以下の問に答えよ．ただし，$\sqrt{2}$=1.41，$\sqrt{3}$=1.73 とする．回転方向は**反時計回りを正**とし，**有効数字 3 桁**で解答せよ．また，解答にあたっては**単位をつけよ**．

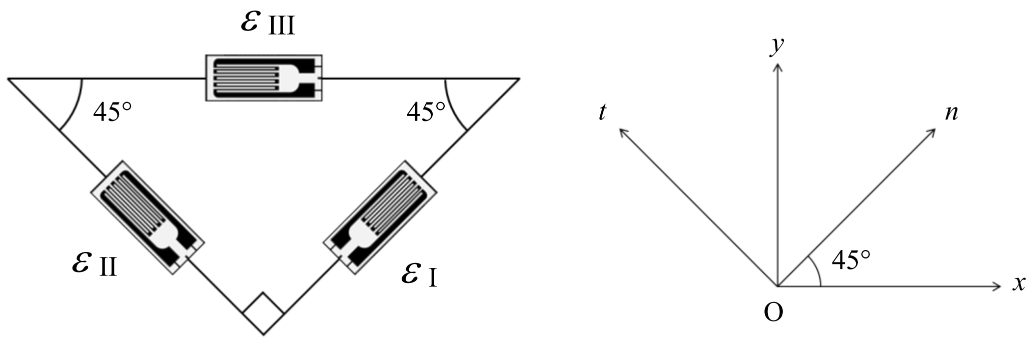


Fig. 2 3 軸ひずみゲージ．

(1) n-t 座標系について考える．各ひずみゲージの値とひずみの座標変換の式より，せん断ひずみγ_{nt}を求め，n-t 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]を示せ．

(2) (1)で求めたひずみテンソルより，モールのひずみ円を描き，その中心と半径を示せ．

(3) (2)で描いたモールのひずみ円より，x-y 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]を示せ．

(4) 主ひずみ(ε_1, ε_2)および x-y 座標系からみた主ひずみ方向(θ_1, θ_2)を求めよ．ただし，$\varepsilon_1>\varepsilon_2$, $-90° \le \theta_1, \theta_2 \le 90°$とする．

(5) 応力－ひずみの関係より，主応力(σ_1,σ_2)を求めよ．

(6) この点における最大せん断応力$\tau_{\max}$を求めよ．

[2]

(1) *n-t* 座標系について考える．各ひずみゲージの値とひずみの座標変換の式より，せん断ひずみγ_{nt}を求め，*n-t* 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]を示せ．

ひずみの座標変換の式は以下のように表される．

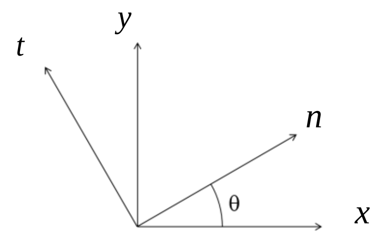


Fig. 1 座標変換.

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_x \sin^2\theta + \varepsilon_y \cos^2\theta - \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{2.2}$$

式(2.1)を *n-t* 座標系に適用する．

$$\varepsilon_{iii} = \varepsilon_n \cos^2 135^\circ + \varepsilon_t \sin^2 135^\circ + \gamma_{nt}\sin 135^\circ \cos 135^\circ \tag{2.3}$$

このとき $\varepsilon_i = 356\mu$， $\varepsilon_{ii} = 156\mu$， $\varepsilon_{iii} = 156\mu$ を代入して

$$\gamma_{nt} = 200\mu \tag{2.4}$$

よって *n-t* 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]は以下のようになる．

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_n & \gamma_{nt}/2 \\ \gamma_{nt}/2 & \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 356\mu & 100\mu \\ 100\mu & 156\mu \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

(2) (1)で求めたひずみテンソルより，モールのひずみ円を描き，その中心と半径を示せ．

(1)より $(\varepsilon_n, \gamma_{nt}/2) = (356\mu, 100\mu)$，$(\varepsilon_t, -\gamma_{nt}/2) = (156\mu, -100\mu)$ をプロットしてモールのひずみ円を描くと図 2 のようになる．

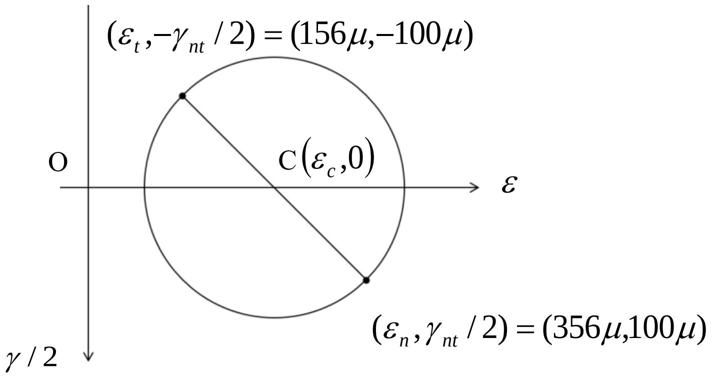


Fig.2 モールのひずみ円．

中心 C の座標は，以下のように求められる．

$$\begin{aligned}(\varepsilon_c, 0) &= \left(\frac{\varepsilon_n + \varepsilon_t}{2}, 0\right) \\ &= \left(\frac{356\mu + 156\mu}{2}, 0\right) \\ &= (256\mu, 0) \end{aligned} \tag{2.6}$$

また半径 r は以下のように求められる．

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_n - \varepsilon_t)^2 + 4\left(\frac{\gamma_{nt}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(356\mu - 156\mu)^2 + 4(100\mu)^2} \\ &= 100\sqrt{2}\mu \\ &= 141\mu \end{aligned} \tag{2.7}$$

(3) (2)で描いたモールのひずみ円より，*x*-*y* 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]を示せ．

(2)で描いたモールのひずみ円について，図 3 のように角αをおく．

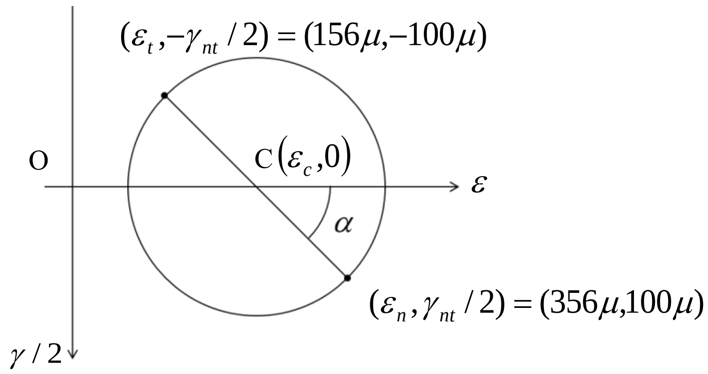


Fig.3 モールのひずみ円．

角αは以下のように求められる．

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tan^{-1}\left|\frac{\left(\dfrac{\gamma_{nt}}{2}\right) - 0}{\varepsilon_n - \varepsilon_c}\right| \\
&= \tan^{-1}\left|\frac{100\mu}{356\mu - 256\mu}\right| \\
&= 45^\circ
\end{aligned} \tag{2.8}$$

また *n*-*t* 座標系は *x*-*y* 座標系を反時計周りに 45°回転させた座標系であるから，モールのひずみ円上では *n*-*t* 座標系のひずみを時計回りに 90°回転させることで *x*-*y* 座標系におけるひずみを得ることができる．これをモールのひずみ円上で表すと図 4 のようになる．

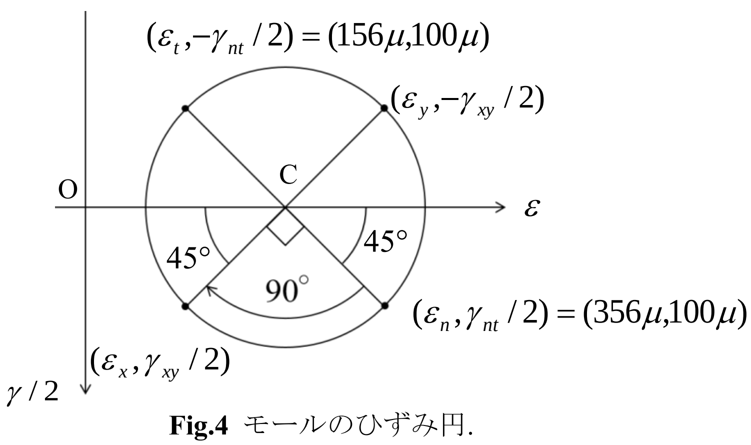


Fig.4 モールのひずみ円．

図 4 における対称性から *x-y* 座標系のひずみの値を得ることができる．

$$\varepsilon_x = 156\mu, \varepsilon_y = 356\mu, \gamma_{xy}/2 = 100\mu \tag{2.9}$$

よって *x-y* 座標系におけるひずみテンソル$[\varepsilon_{ij}]$は以下のようになる．

$$\begin{aligned}[\varepsilon_{ij}] &= \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 156\mu & 100\mu \\ 100\mu & 356\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.10}$$

(4) 主ひずみ(ε_1, ε_2)および *x-y* 座標系からみた主ひずみ方向(θ_1, θ_2)を求めよ．
ただし，$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $-90° \le \theta_1, \theta_2 \le 90°$ とする．

モールのひずみ円より主ひずみε_1，ε_2は以下のように得られる．

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_c + r \\ \varepsilon_c - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 256\mu + 141\mu \\ 256\mu - 141\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 397\mu \\ 115\mu \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

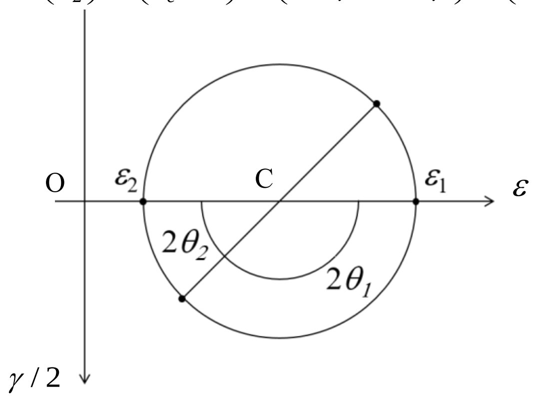


Fig.5 モールのひずみ円.

図 5 のように $2\theta_1$，$2\theta_2$を置くと主ひずみ方向は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left|\frac{\gamma_{xy}/2}{\varepsilon_x - \varepsilon_c}\right| \\ &= 22.5° \end{aligned} \tag{2.12}$$

さらに，

$$\theta_1 = 90° - \theta_2 = 67.5° \tag{2.13}$$

よって主ひずみ方向を符号に注意して整理すると

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67.5° \\ -22.5° \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

(5) 応力－ひずみの関係より，主応力(σ_1,σ_2)を求めよ．

問題の点は板厚が十分薄いことから，平面応力状態とみなすことができることができる．よって

$$\sigma_z = 0 \tag{2.15}$$

応力-ひずみの関係から

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_2\right) \tag{2.16}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu\sigma_1\right) \tag{2.17}$$

これを応力σ_1，σ_2について整理すると，主応力σ_1，σ_2は

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2\right) \\ &= \frac{182\times10^9}{1-0.3^2}\left(397\mu + 0.3\times115\mu\right) \\ &= 86.3 \ \text{[MPa]}\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1\right) \\ &= \frac{182\times10^9}{1-0.3^2}\left(115\mu + 0.3\times397\mu\right) \\ &= 46.8 \ \text{[MPa]}\end{aligned} \tag{2.19}$$

よって

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86.3 \\ 46.8 \end{pmatrix} \ \text{[MPa]} \tag{2.20}$$

(6) **この点における最大せん断応力 τ_{max} を求めよ．**

平面応力状態であるから主応力は

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86.3 \\ 46.8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ [MPa]} \tag{2.21}$$

となり， $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ なので最大せん断応力 τ_{max} は

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ &= \frac{86.3 - 0}{2} \\ &= 43.15 \\ &\approx 43.2 \quad \text{[MPa]} \end{aligned} \tag{2.22}$$