※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却．

材料の力学 1　Step1　第 4 回演習問題（2017/5/16 実施）

[1] 図 1 は板厚が十分に薄い弾性体のある点における応力状態を示したものである．なお，図 1(c)は図 1(a)，(b)の応力状態を重ね合わせたときの様子を示している．このとき，以下の設問に答えよ．ただし，z 方向は板厚方向とし，十分に薄いため平面応力状態と考えることができる．

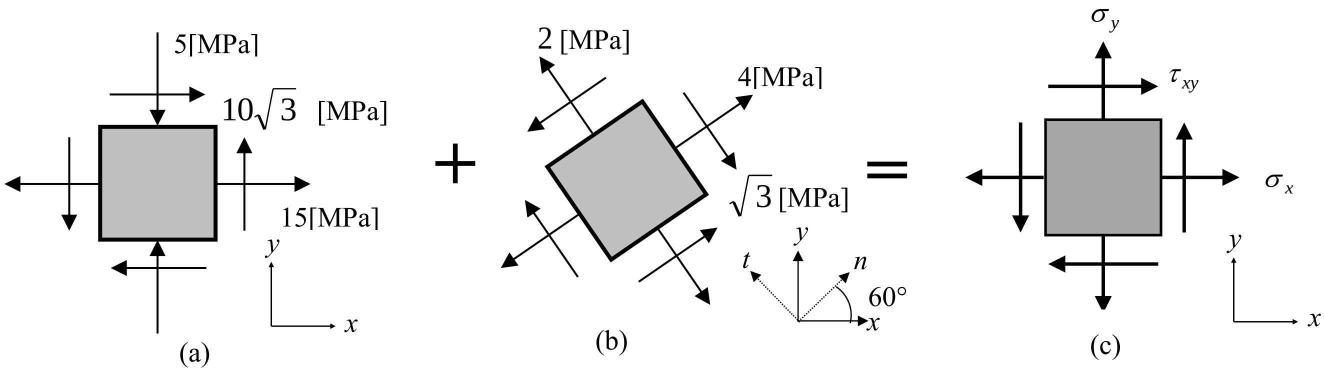


Fig. 1 微小要素における応力状態.

Fig. 1 (a)について，以下の設問に答えよ．

(1) モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

(2) 主応力(σ_1, σ_2)，主応力方向(θ_1, θ_2)を求めよ．
(ただし，反時計回りを正，$-90° < \theta_1, \theta_2 < 90°$とする．)

(3) 板に作用する最大せん断応力$\tau_{\max}$を求めよ．

Fig. 1 (b)について，以下の設問に答えよ．

(4) モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

(5) x-y 座標系における応力テンソルを求めよ．

Fig. 1 (c)について，以下の設問に答えよ．

(6) モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

(7) 主応力(σ_1, σ_2) 主応力方向(θ_1, θ_2)を求めよ．
(ただし，反時計回りを正，$-90° < \theta_1, \theta_2 < 90°$とする．)

(8) 板に作用する最大せん断応力$\tau_{\max}$を求めよ．

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却．

[1] Fig. 1 (a)について，以下の設問に答えよ．

(1) モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

図 1(a)について応力テンソルは以下のように示される．

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10\sqrt{3} \\ 10\sqrt{3} & -5 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} \tag{1.1}$$

応力テンソルよりモールの応力円が描ける．

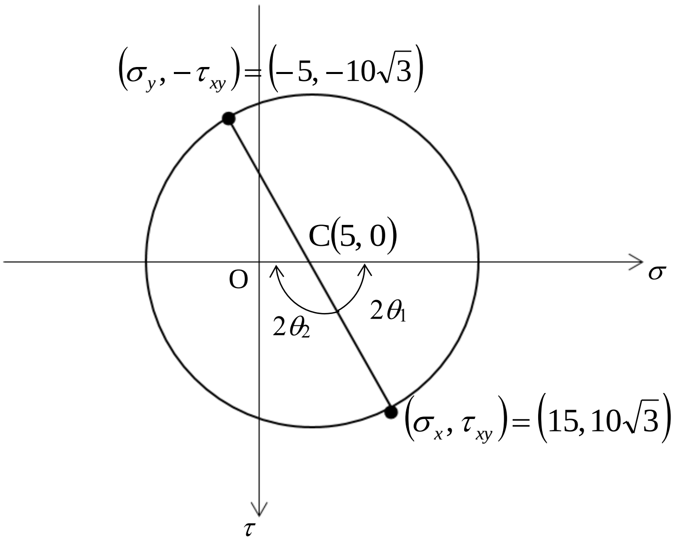


Fig. 1.1　(a)におけるモールの応力円．

モールの応力円の中心σ_cおよび，半径 r は以下のように求められる．

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(15 - 5) = 5 \text{ [MPa]} \tag{1.2}$$

より，

$$(\sigma_c,\quad 0) = (5, 0) \text{ [MPa]} \tag{1.3}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(15+5)^2 + 4\times(10\sqrt{3})^2} = 20 \text{ [MPa]} \tag{1.4}$$

(2) 主応力(σ_1, σ_2)，主応力方向(θ_1, θ_2)を求めよ．

(ただし，反時計回りを正，$-90° < \theta_1, \theta_2 < 90°$とする．)

図 1.1 より，主応力(σ_1, σ_2)，主方向(θ_1, θ_2)は以下のように求まる．

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_c + r\\ \sigma_c - r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\ -15\end{pmatrix} [\mathrm{MPa}] \tag{1.5}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{20\sqrt{3}}{15-(-5)} = \sqrt{3} \tag{1.6}$$

$$\therefore 2\theta_1 = 60° \Leftrightarrow \theta_1 = 30° \tag{1.7}$$

二つの主方向は直交するので，

$$\theta_2 = \theta_1 - 90° = 30° - 90° = -60° \tag{1.8}$$

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30°\\ -60°\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

(3) 板に作用する最大せん断応力τ_{max}を求めよ．

板厚が十分薄く，平面応力状態とみなせるので，板厚方向の主応力σ_3は 0 となる．

したがって，(a)において主応力$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$は以下のようになる．

$$(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3) = (25,\ -15,\ 0) [\mathrm{MPa}] \tag{1.10}$$

(本来は$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$とするが，(2)で$\sigma_1$，$\sigma_2$を用いたため板厚方向の主応力を$\sigma_3$と置いた．)

ここで，$\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$なので板に作用する最大せん断応力$\tau_{max}$は，

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{25-(-15)}{2} = 20 [\mathrm{MPa}] \tag{1.11}$$

Fig. 1 (b)について，以下の設問に答えよ

(4) モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

図 1(b)について n-t 座標系での応力テンソルは以下のように示される．

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \ \text{[MPa]} \tag{1.12}$$

応力テンソルよりモールの応力円が描ける．

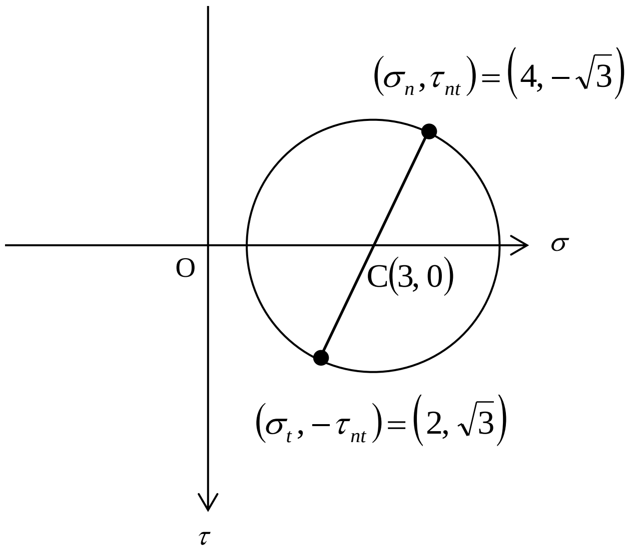


Fig. 1.2　(b)におけるモールの応力円．

応力テンソルよりモールの応力円の中心σ_cおよび，半径 r は以下のように求められる．

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t) = \frac{1}{2}(4+2) = 3 \tag{1.13}$$

より

$$(\sigma_c,\quad 0) = (3,\quad 0) \tag{1.14}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_n - \sigma_t)^2 + 4\tau_{nt}{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2 + 4\times\sqrt{3}^2} = 2 \tag{1.15}$$

(5) *x-y* 座標系における応力テンソルを求めよ．

時計回りに 60º 回転させればよいのでモールの応力円上では $2\theta = 120º$ 時計回りに回転させる．

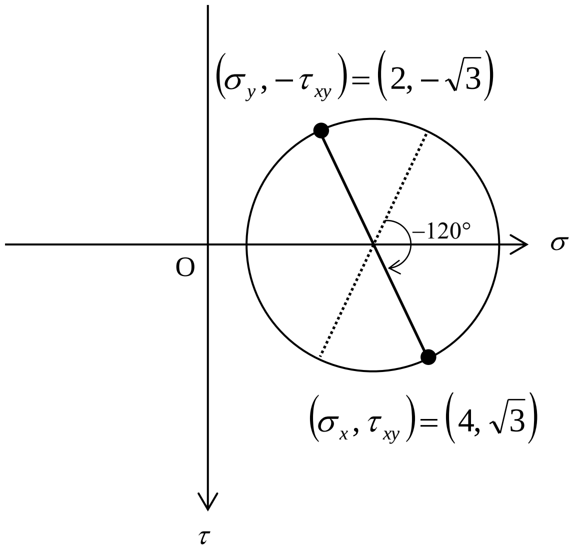


Fig. 1.3　(b)におけるモールの応力円．

図 1.3 より *x-y* 座標系における応力テンソルは次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Fig. 1 (c)について，以下の設問に答えよ.

(6) モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ.

ここまでの結果を用いて，(a)，(b)での x-y 座標系における応力テンソルを合成する.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10\sqrt{3} \\ 10\sqrt{3} & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 11\sqrt{3} \\ 11\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

合成した応力テンソルよりモールの応力円を描く.

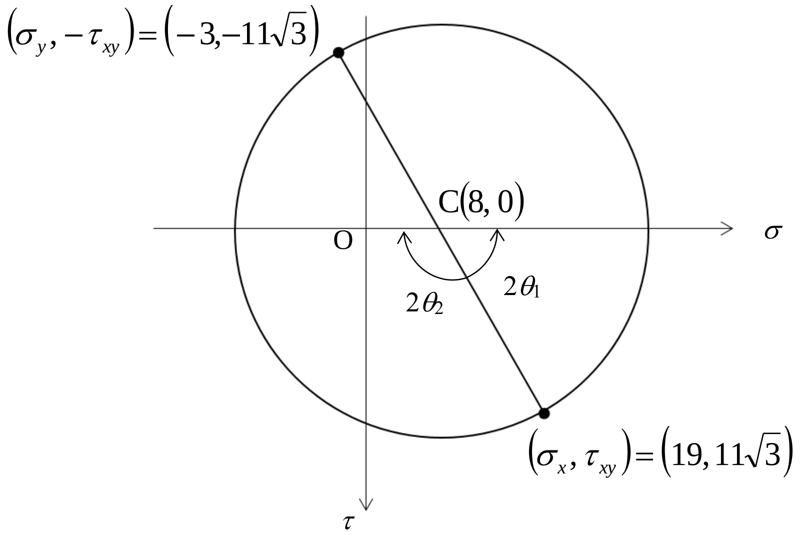


Fig. 1.4　(c)におけるモールの応力円.

モールの応力円の中心σ_cおよび，半径 r は以下のように求められる.

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(19 - 3) = 8 \text{ [MPa]} \tag{1.18}$$

より，

$$(\sigma_c,\quad 0) = (8, 0) \text{ [MPa]} \tag{1.19}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(19+3)^2 + 4 \times (11\sqrt{3})^2} = 22 \quad \text{[MPa]} \tag{1.20}$$

(7) 主応力(σ_1, σ_2) 主応力方向(θ_1, θ_2)を求めよ.

(ただし，反時計回りを正，$-90° < \theta_1, \theta_2 < 90°$とする.)

図 1.4 より，主応力$\left(\sigma_1, \sigma_2\right)$，主方向$\left(\theta_1, \theta_2\right)$は以下のように求まる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_c + r \\ \sigma_c - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -14 \end{pmatrix} \text{[MPa]} \tag{1.21}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{22\sqrt{3}}{19+3} = \sqrt{3} \tag{1.22}$$

$$\therefore 2\theta_1 = 60° \Leftrightarrow \theta_1 = 30° \tag{1.23}$$

二つの主方向は直交するので，

$$\theta_2 = \theta_1 - 90° = 30° - 90° = -60° \tag{1.24}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30° \\ -60° \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

(8) 板に作用する最大せん断応力τ_{max}を求めよ．

(3)同様に板厚が十分薄く，平面応力状態とみなせるので，板厚方向の主応力 σ_3 は 0 となる．したがって，(c)において主応力$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$は以下のようになる．

$$(\sigma_1,\quad \sigma_2,\quad \sigma_3) = (30,\quad -14\quad 0)\,[\mathrm{MPa}] \tag{1.26}$$

ここで，$\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ なので板に作用する最大せん断応力 τ_{max} は，

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{30-(-14)}{2} = 22\,[\mathrm{MPa}] \tag{1.27}$$

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却．

[2] 図 2 に示すように点 A，点 E において壁に固定された段付き丸棒がある．棒の AB 間，DE 間には分布荷重 p が図のように対称に作用している．丸棒の弾性率を E，断面積は AB 間，DE 間では $2A$，BD 間では A として，以下の問いに答えよ．

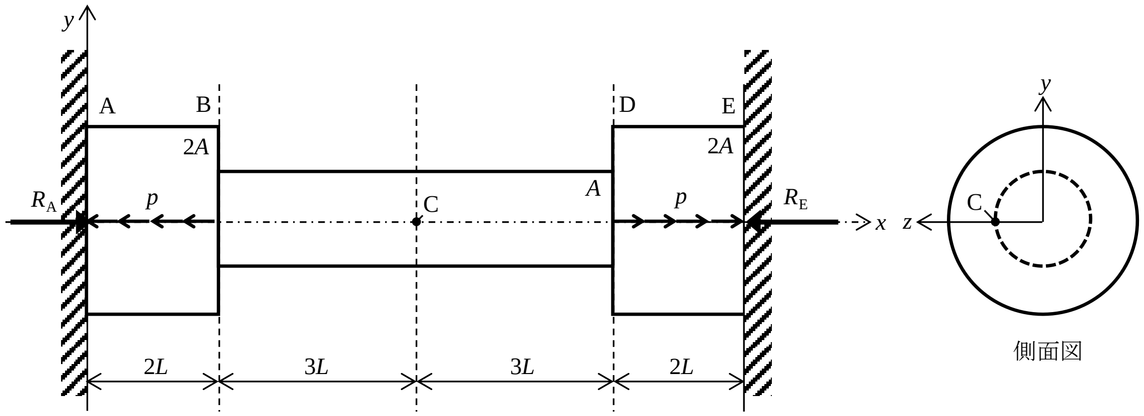


Fig. 2 両端を壁に固定された段付き丸棒.

(1) 点 A，点 E における壁からの反力 R_A，R_E を用いて力のつり合い式を示せ．

(2) R_A を用いて AB 間に生じる変位 δ_{AB}，BC 間に生じる変位 δ_{BC} をそれぞれ示せ．

(3) 対称性により AC 間に生じる変位 $\delta_{AC}= 0$ であることを考慮して，変位の条件と力のつり合い式から R_A，R_E を求めよ．

(4) 丸棒に作用している軸力 $N(x)$，垂直応力 $\sigma(x)$ の x 方向変化をそれぞれ図示せよ．

(5) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き，点 C に生じる最大せん断応力 τ_{max} を求めよ．

[2]

(1) 点 A，点 E における壁からの反力 R_A，R_E を用いて力のつり合い式を示せ．

点 A，点 E における壁からの反力 R_A，R_E を用いて FBD を描くと次のようになる．

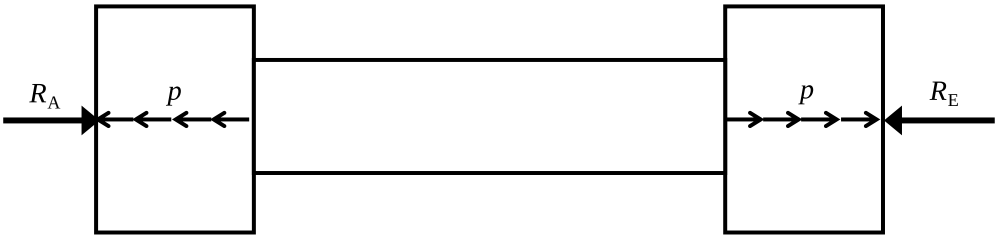


Fig. 2.1 FBD.

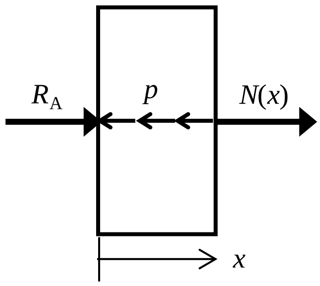
図 2.1 における力のつり合いより，

$$\begin{aligned} &R_A - 2pL + 2pL - R_E = 0 \\ &\therefore R_A = R_E \end{aligned} \tag{2.1}$$

(2) R_A を用いて AB 間に生じる変位 δ_{AB}，BC 間に生じる変位 δ_{BC} をそれぞれ示せ．

(i) $0 \le x < 2L$ のとき

軸力を $N(x)$とすると，作用する力は下図のようになる．



この図より，軸力 $N(x)$，応力$\sigma(x)$，ひずみ$\varepsilon(x)$，変位δ_{AB}は次のようになる．

$$N(x) = -R_A + px \tag{2.2}$$

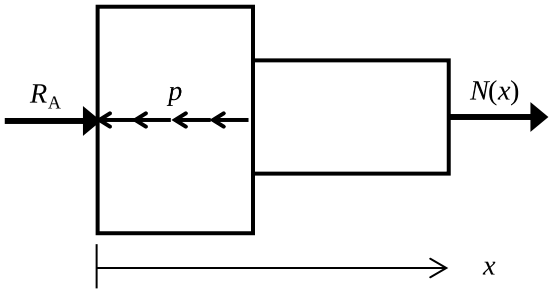
$$\sigma(x) = \frac{-R_A + px}{2A} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{-R_A + px}{2EA} \tag{2.4}$$

$$\delta_{AB} = \int_0^{2L} \varepsilon(x)\,dx = \int_0^{2L} \frac{-R_A + px}{2EA} dx = \frac{1}{EA}\left(-R_A L + pL^2\right) \tag{2.5}$$

(ii) $2L \le x < 5L$ のとき

軸力を $N(x)$とすると，作用する力は下図のようになる．



この図より，軸力 $N(x)$，応力$\sigma(x)$，ひずみ$\varepsilon(x)$，変位δ_{BC} は次のようになる．

$$N(x) = -R_A + 2pL \tag{2.6}$$

$$\sigma(x) = \frac{-R_A + 2pL}{A} \tag{2.7}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{-R_A + 2pL}{EA} \tag{2.8}$$

$$\delta_{BC} = \int_{2L}^{5L} \varepsilon(x) dx = \int_{2L}^{5L} \frac{-R_A + 2pL}{EA} dx = \frac{1}{EA}\left(-3R_A L + 6pL^2\right) \tag{2.9}$$

(3) 対称性により AC 間に生じる変位$\delta_{AC} = 0$ であることを考慮して，変位の条件と力のつり合い式から R_A，R_E を求めよ．

式(2.5)，(2.9)より AC 間に生じる変位δ_{AC} は次のようになる．

$$\begin{aligned} \delta_{AC} = \delta_{AB} + \delta_{BC} &= \frac{1}{EA}\left(-R_A L + pL^2\right) + \frac{1}{EA}\left(-3R_A L + 6pL^2\right) \\ &= \frac{1}{EA}\left(-4R_A L + 7pL^2\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

対称性により変位δ_{AC}=0 となり式(2.10)は次のように表せる．

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{EA}\left(-4R_A L + 7pL^2\right) \\ \therefore R_A &= \frac{7pL}{4} \end{aligned} \tag{2.11}$$

式(2.11)と式(2.1)より，R_A，R_E は次のように求まる．

$$R_A = R_E = \frac{7}{4}pL \tag{2.12}$$

以上のように，力のつり合い式と変位の条件(δ_{AC}=0)の連立方程式により，対称性を考慮した丸棒の不静定問題を解くことができた．

(4) 丸棒に作用している軸力 $N(x)$，垂直応力$\sigma(x)$の x 方向変化をそれぞれ図示せよ．

式(2.2)，(2.3)，(2.6)，(2.7)に式(2.12)を代入すると，軸力 $N(x)$，垂直応力$\sigma(x)$はそれぞれ次のようになる．

(i) $0 \le x < 2L$ のとき

$$N(x) = -R_{\mathrm{A}} + px = p\left(x - \frac{7}{4}L\right) \tag{2.13}$$

$$\sigma(x) = \frac{-R_{\mathrm{A}} + px}{2A} = \frac{p}{2A}\left(x - \frac{7}{4}L\right) \tag{2.14}$$

(ii) $2L \le x < 5L$ のとき

$$N(x) = -R_{\mathrm{A}} + 2pL = \frac{pL}{4} \tag{2.15}$$

$$\sigma(x) = \frac{-R_{\mathrm{A}} + 2px}{A} = \frac{pL}{4A} \tag{2.16}$$

したがって，対称性を考慮して軸力 $N(x)$，垂直応力$\sigma(x)$の x 方向変化を図示するとそれぞれ次のようになる．

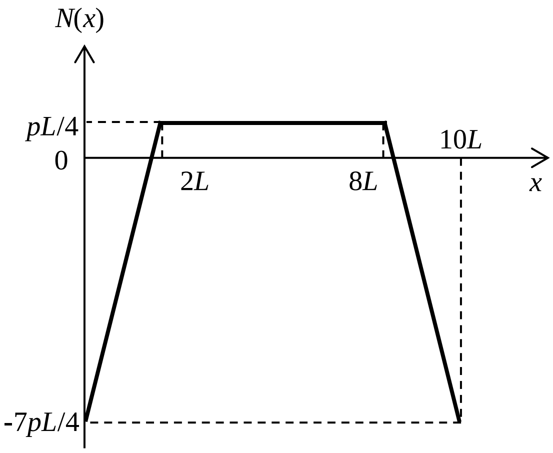


Fig. 2.2 軸力分布．

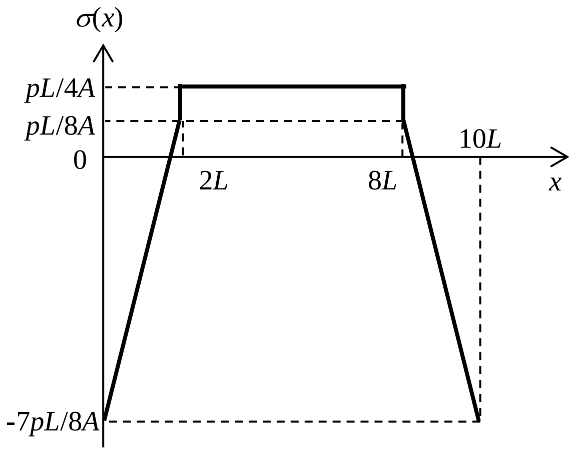


Fig. 2.3 応力分布．

(5) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き，点 C に生じる最大せん断応力τ_{max}を求めよ．

(4)より，点 C における応力テンソルは次のようになる．

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{pL}{4A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

この応力テンソルから図 2.4 のようにモールの応力円が描ける．

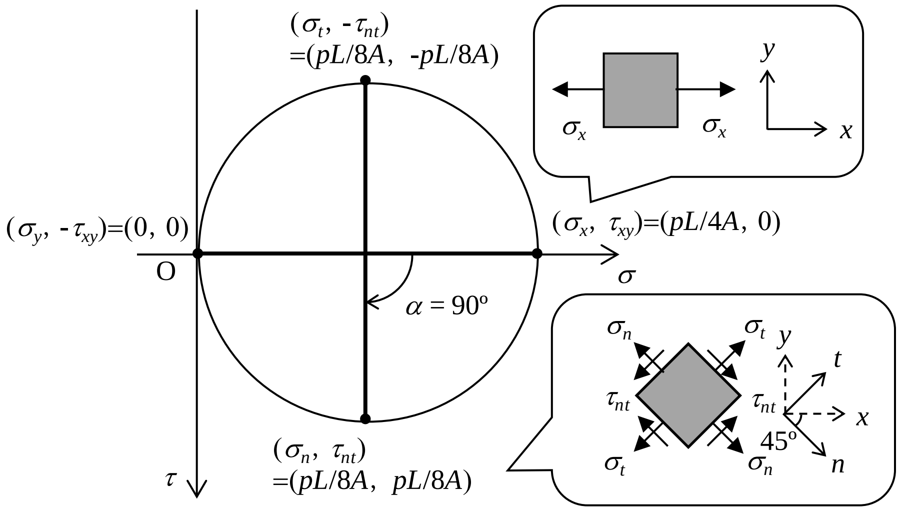


Fig. 2.4 点 C におけるモールの応力円．

また，応力テンソルからモールの応力円の中心(σ_c, 0)と半径 r は次のように求まる．

$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{pL}{8A} \tag{2.18}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x + \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{pL}{8A} \tag{2.19}$$

図 2.4 に示したモールの応力円より，最大せん断応力は，x 軸より 45°傾斜した面に生じ，その値は次の通りである．

$$\tau_{max} = \frac{pL}{8A} \tag{2.20}$$