※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは次回演習時に返却，欠席の場合は 58 号館レポート BOX にて返却．

材料の力学 1　Step1　第 3 回演習問題（2017/5/9 実施）

[1] 微小弾性体が図 1 に示す応力状態にある．ただし，$-90° \le \theta \le 90°$，$\overline{\mathrm{AB}} = S$ とし z 軸方向厚さは単位長さとする．このとき以下の問いに答えよ

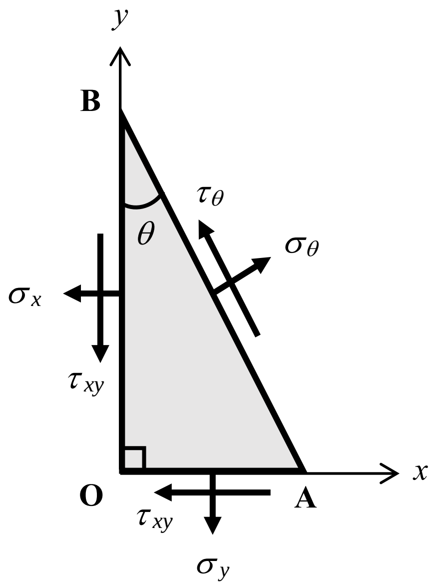

Fig. 1 微小弾性体の応力状態.

(1) 図 1 において，x，y 方向それぞれの力のつり合い式を立てることにより，σ_θ, τ_θのそれぞれをσ_x，σ_y，τ_{xy}，θ を用いて表せ.

(2) (1)で求めたσ_θ，τ_θ より，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ.

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta{}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}{}^2 \qquad \text{(A)}$$

以降はσ_x=10[MPa]，σ_y=20[MPa]，τ_{xy}=$5\sqrt{3}$[MPa]とする.

(3) (A)式に値を代入し，σ-τ 平面上にモールの応力円を描け.

(4) 主応力(σ_1, σ_2)，主方向(θ_1，θ_2)をそれぞれ求めよ．ただし，$-90° \le \theta_2 < \theta_1 \le 90°$とする．また，2 つの主方向の関係性を述べよ.

[1]

(1) 図 1 において，x，y 方向それぞれの力のつり合い式を立てることにより，σ_θ, τ_θ のそれぞれを σ_x，σ_y，τ_{xy}，θ を用いて表せ．

まず，x 方向，y 方向に分けて力のつり合いを考える．$\overline{AB}=S$ より，$\overline{OA}=S\sin\theta$, $\overline{OB}=S\cos\theta$ となる．また，σ_θ と τ_θ は図1.1に示すように分解できるため，力のつり合い式は，以下の様になる．

（x 方向）
$$S\sigma_\theta\cos\theta - S\tau_\theta\sin\theta - S\sigma_x\cos\theta - \tau_{xy}S\sin\theta = 0$$
$$\sigma_\theta\cos\theta - \tau_\theta\sin\theta - \sigma_x\cos\theta - \tau_{xy}\sin\theta = 0 \tag{1.1}$$

（y 方向）
$$S\sigma_\theta\sin\theta + S\tau_\theta\cos\theta - S\sigma_y\sin\theta - \tau_{xy}S\cos\theta = 0$$
$$\sigma_\theta\sin\theta + \tau_\theta\cos\theta - \sigma_y\sin\theta - \tau_{xy}\cos\theta = 0 \tag{1.2}$$

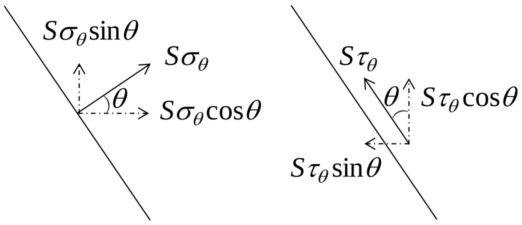

Fig.1.1 力の分解.

式(1.1)×$\cos\theta$+ 式(1.2)×$\sin\theta$より

$$\begin{array}{rl} & \sigma_\theta\cos^2\theta - \tau_\theta\sin\theta\cos\theta - \sigma_x\cos^2\theta - \tau_{xy}\sin\theta\cos\theta = 0 \\ + & \sigma_\theta\sin^2\theta + \tau_\theta\sin\theta\cos\theta - \sigma_y\sin^2\theta - \tau_{xy}\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \hline & \sigma_\theta - \sigma_x\cos^2\theta - \sigma_y\sin^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta = 0 \end{array}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \sigma_y\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\therefore \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \tag{1.3}$$

式(1.1)×sinθ − 式(1.2)×cosθより

$$\begin{array}{rl} & \sigma_\theta \sin\theta\cos\theta - \tau_\theta \sin^2\theta - \sigma_x \sin\theta\cos\theta - \tau_{xy}\sin^2\theta = 0 \\ - & \sigma_\theta \sin\theta\cos\theta + \tau_\theta \cos^2\theta - \sigma_y \sin\theta\cos\theta - \tau_{xy}\cos^2\theta = 0 \\ \hline & -\tau_\theta - (\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta - \tau_{xy}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 0 \end{array}$$

$$\tau_\theta = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\therefore \tau_\theta = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{1.4}$$

(2) (1)で求めたσ_θ，τ_θ より，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ.

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta{}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}{}^2 \tag{A}$$

式(1.3)を変形し，両辺を2乗すると，

$$\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\left\{\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right\}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2\cos^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta + \tau_{xy}{}^2\sin^2 2\theta \tag{1.5}$$

上式に式(1.4)の2乗を加えると，

$$\begin{aligned} \left\{\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right\}^2 + \tau_\theta{}^2 = & \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2\cos^2 2\theta + \cancel{(\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta} + \tau_{xy}{}^2\sin^2 2\theta \\ & + \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2\sin^2 2\theta - \cancel{(\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta} + \tau_{xy}{}^2\cos^2 2\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta{}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}{}^2 \tag{A}$$

以降はσ_x=10[MPa]，σ_y=20[MPa]，τ_{xy}=5$\sqrt{3}$[MPa]とする．

(3) (A)式に値を代入し，$\boldsymbol{\sigma}$-$\boldsymbol{\tau}$ 平面上にモールの応力円を描け．

応力テンソル($\boldsymbol{\sigma}$)は，

$$(\boldsymbol{\sigma})=\begin{pmatrix} 10 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 20 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

となる．従って，モールの応力円は 2 点(σ_x, τ_{xy})=(10, 5$\sqrt{3}$)，(σ_y,$-\tau_{xy}$)=(20,$-$5$\sqrt{3}$)を通る円であり，その中心と半径は，

$$\begin{gathered}(\sigma_c,0)=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)=(15,0) \\ r=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}{}^2}=10\end{gathered} \tag{1.7}$$

以上より，モールの応力円は図 1.2 のようになる．

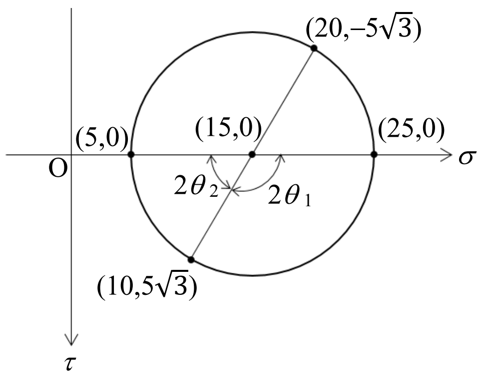

Fig. 1.2 モールの応力円．

また，式(A)に値を代入して整理すると，

$$\begin{gathered}\left(\sigma_\theta-\frac{1}{2}(10+20)\right)^2+\tau_\theta{}^2=\frac{1}{4}(10-20)^2+5\sqrt{3}^2 \\ \therefore(\sigma_\theta-15)^2+\tau_\theta{}^2=10^2\end{gathered} \tag{1.8}$$

が得られ，図 1.2 と一致することがわかる．

(4) 主応力(σ_1, σ_2)，主方向(θ_1， θ_2)をそれぞれ求めよ．ただし，$-90° \leq \theta_2 < \theta_1 \leq 90°$とする．また，2 つの主方向の関係性を述べよ．

図 1.2 より，主応力は，

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15+10\\ 15-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\ 5\end{pmatrix}[\mathrm{MPa}] \tag{1.9}$$

となる．また，図 1.2 より主方向は，

$$\begin{pmatrix}2\theta_1\\ 2\theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120°\\ -60°\end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60°\\ -30°\end{pmatrix} \tag{1.10}$$

となり，

以上より，2 つの主方向は直交することがわかる．

これらの関係を図示すると，図 1.3 のようになる．

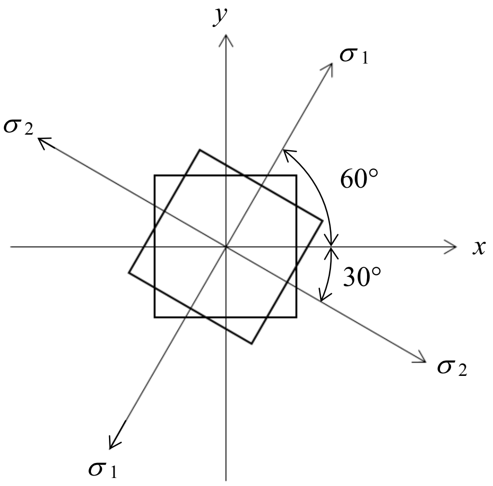

Fig. 1.3 主応力と主方向.

[2] 図 2 は弾性体のある点における応力状態を示したものである．なお，図 2(b)は図 2(a)を時計回りに 30°回転させた状態，図 2(c)は図 2(d)を時計回りに 60°回転させた状態を図示したものである．この時，以下の設問に答えよ．

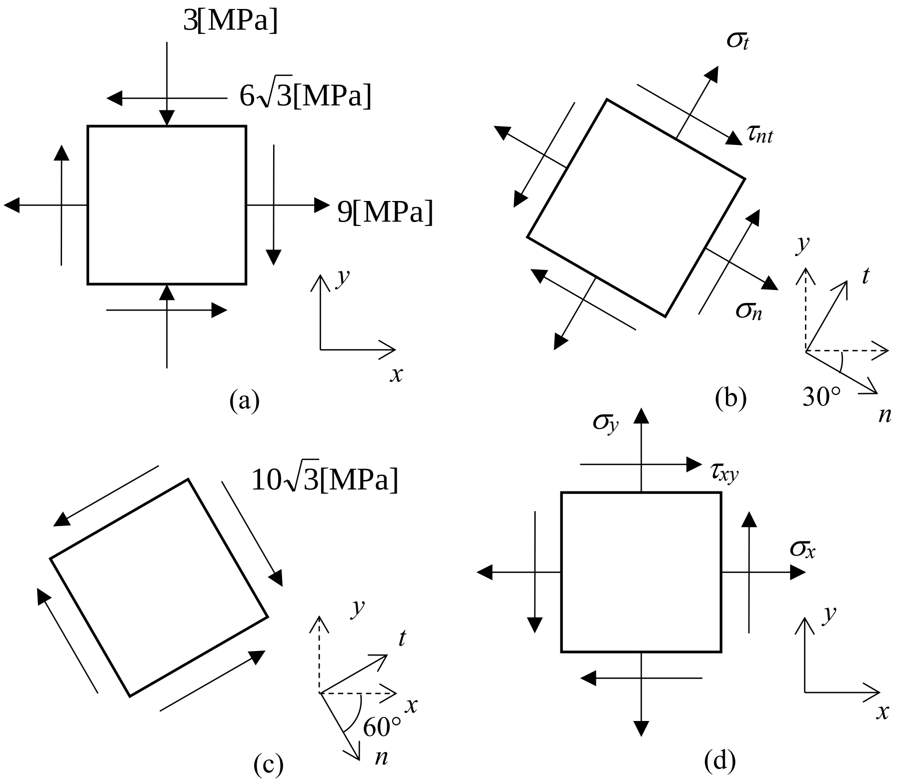

Fig. 2 弾性体のある点における応力状態.

(1) 図 2(a)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ．

(2) (1)で描いたモールの応力円から図(b)の応力テンソル※1 を求めよ．

(3) 図 2(a)について座標変換を行うことで図 2(b)の応力テンソルを求め，これが(2)の結果と一致することを示せ．なお必要に応じて以下の座標変換マトリックス※2 を用いよ．

(4) 図 2(c)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ．

(5) (4)で描いたモールの応力円から図(d)の応力テンソル※1 を求めよ．

(6) 図 2(c)について座標変換を行うことで図 2(d)の応力テンソルを求め，これが(5)の結果と一致することを示せ.

※1 図 2(b), (d)の応力テンソル：$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_n & \tau_{nt}\\ \tau_{tn} & \sigma_t\end{pmatrix}$[MPa]，$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{pmatrix}$[MPa]

※2 座標変換マトリックス　：$[L]=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

[2]

(1) 図 2(a)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ．

図 2(a)において x-y 座標系で与えられた応力テンソルは式(2.1)のようになる．

$$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -6\sqrt{3}\\ -6\sqrt{3} & -3\end{pmatrix}[\mathrm{MPa}] \tag{2.1}$$

この応力テンソルから図 2.1 のようなモールの応力円が描ける．

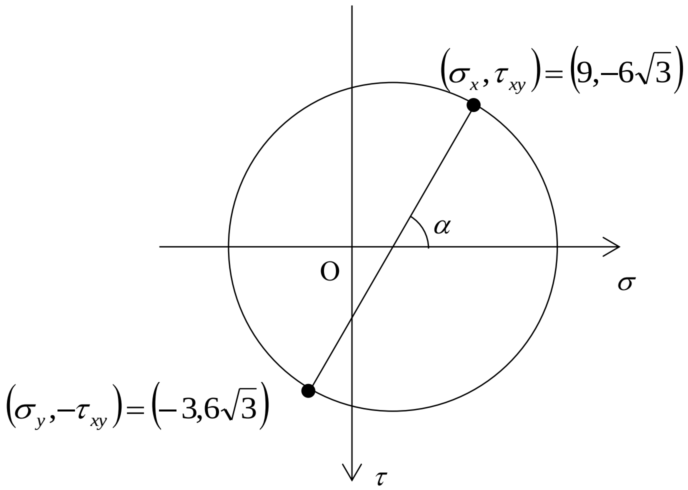

Fig. 2.1 図 2(a)におけるモールの応力円.

また，応力テンソルからモールの応力円の中心と半径は以下のように求められる．

$$\text{中心：}(\sigma_c,\tau_c)=\left(\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y),0\right)=\left(\frac{1}{2}(9-3),0\right)=(3,0) \tag{2.2}$$

$$\text{半径：}r=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}{}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\{9-(-3)\}^2+4(-6\sqrt{3})^2}=12 \tag{2.3}$$

(2) (1)で描いたモールの応力円から図(b)の応力テンソルを求めよ．

図 2.1 のように角度をαとおくと，

$$\tan\alpha=\left|\frac{\tau_{xy}}{\sigma_c-\sigma_x}\right|=\left|\frac{-5\sqrt{3}}{15-10}\right|=\sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha=60^\circ \tag{2.4}$$

座標をθ=30°時計回りに回転させるとき，モールの応力円上では 2θ=60°時計回りの回転となる．よって座標回転後(図 2(b))のモールの応力円は図 2.2 のようになる．

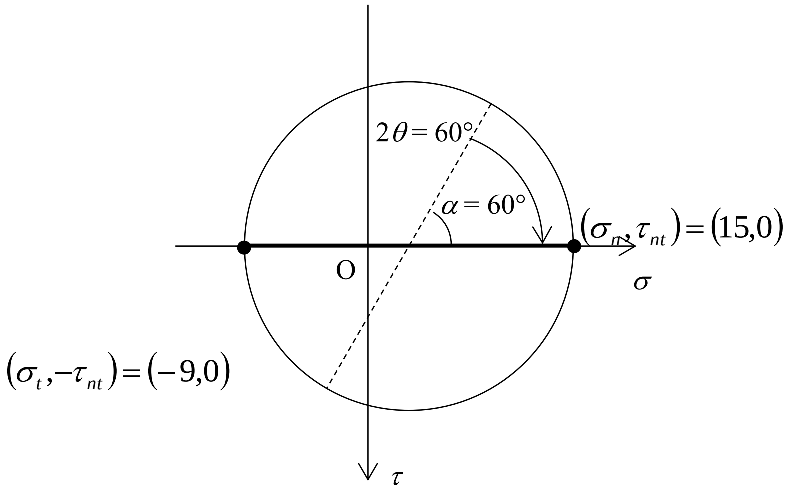

Fig. 2.2 図 2(b)におけるモールの応力円.

以上より図 2(b)の応力テンソルは

$$[\sigma'] = \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \text{[MPa]} \tag{2.5}$$

(3) 図 2(a)について座標変換を行うことで図 2(b)の応力テンソルを求め，これが(2)の結果と一致することを示せ.

x-y 座標における応力テンソルを[σ]とする．x-y 座標からθ回転させた x'-y'座標における応力テンソル[σ']は，座標変形マトリックス[L]を用いると以下のように表される.

$$[\sigma'] = [L][\sigma][L^{-1}] \tag{2.6}$$

よって，x-y 座標から時計回りに 30°回転した状態である n-t 座標における応力テンソルは

$$\begin{aligned}
[\sigma'] = \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-30°) & \sin(-30°) \\ -\sin(-30°) & \cos(-30°) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6\sqrt{3} \\ -6\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & -9\end{pmatrix}[\mathrm{MPa}] \tag{2.7}$$

となる．これは(2)の結果と一致している．

(4) 図 2(c)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ．

図 2(c)において n - t 座標系で与えられた応力テンソルは式(2.8)のようになる．

$$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_n & \tau_{nt}\\ \tau_{tn} & \sigma_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10\sqrt{3}\\ 10\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}[\mathrm{MPa}] \tag{2.8}$$

この応力テンソルからモールの応力円が描ける．

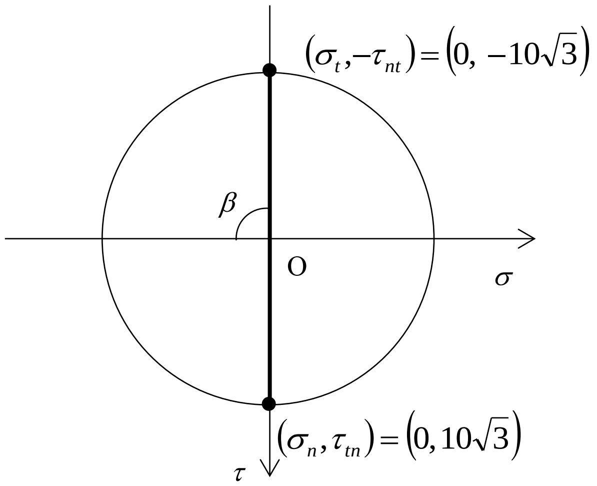

Fig. 2.3 図 2(c)におけるモールの応力円．

また，応力テンソルからモールの応力円の中心と半径は以下のように求められる．

$$中心：(\sigma_c, \tau_c)=\left(\frac{1}{2}(\sigma_n+\sigma_t), 0\right)=(0, 0) \tag{2.9}$$

$$半径：r=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_n-\sigma_t)^2+4\tau_{nt}^{\ 2}}=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+4(10\sqrt{3})^2}=10\sqrt{3} \tag{2.10}$$

(5) (4)で描いたモールの応力円から図(d)の応力テンソルを求めよ．

図 2.3 のように角度をβとおくと，明らかに$\beta = 90°$である．

座標をθ=60°反時計回りに回転させるとき，モールの応力円上では 2θ=120°反時計回りの回転となる．よって座標回転後(図 2(d))のモールの応力円は図 2.4 のようになる．

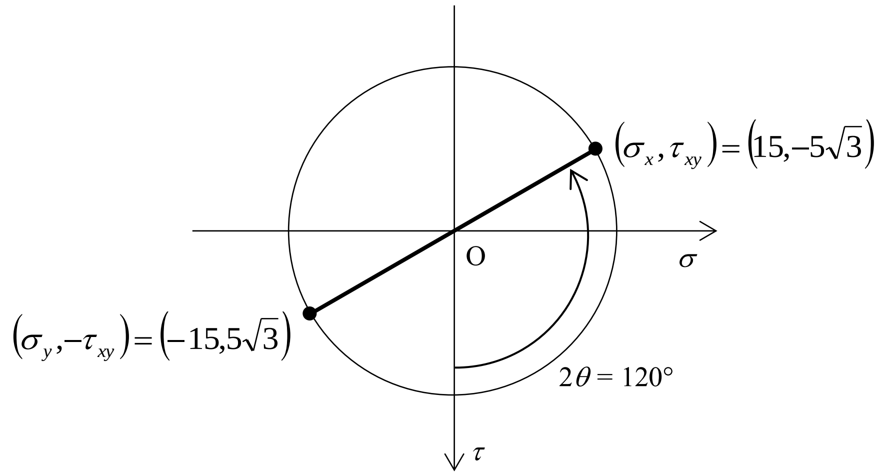

Fig. 2.4 図 2(d)におけるモールの応力円.

以上より図 2(d)の応力テンソルは

$$[\sigma'] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}] \tag{2.11}$$

(6) 図 2(c)について座標変換を行うことで図 2(d)の応力テンソルを求め，これが(5)の結果と一致することを示せ.

n-t 座標から反時計回りに 60°回転した状態である *x-y* 座標における応力テンソルは

$$[\sigma'] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60° & \sin 60° \\ -\sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10\sqrt{3} \\ 10\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}] \tag{2.12}$$

となる．これは(5)の結果と一致している．