※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却．

材料の力学 1 Step1 第 2 回演習問題（2017/4/25 実施）

[1] 図 1 に示すように段付き丸棒が壁に固定されている．OB 間，BC 間にはそれぞれ分布荷重 p, $3p$ が，C 点には荷重 P が図のように作用している．丸棒の弾性率を E，断面積は OB 間を $2A$，BC 間を A として，以下の問いに答えよ．

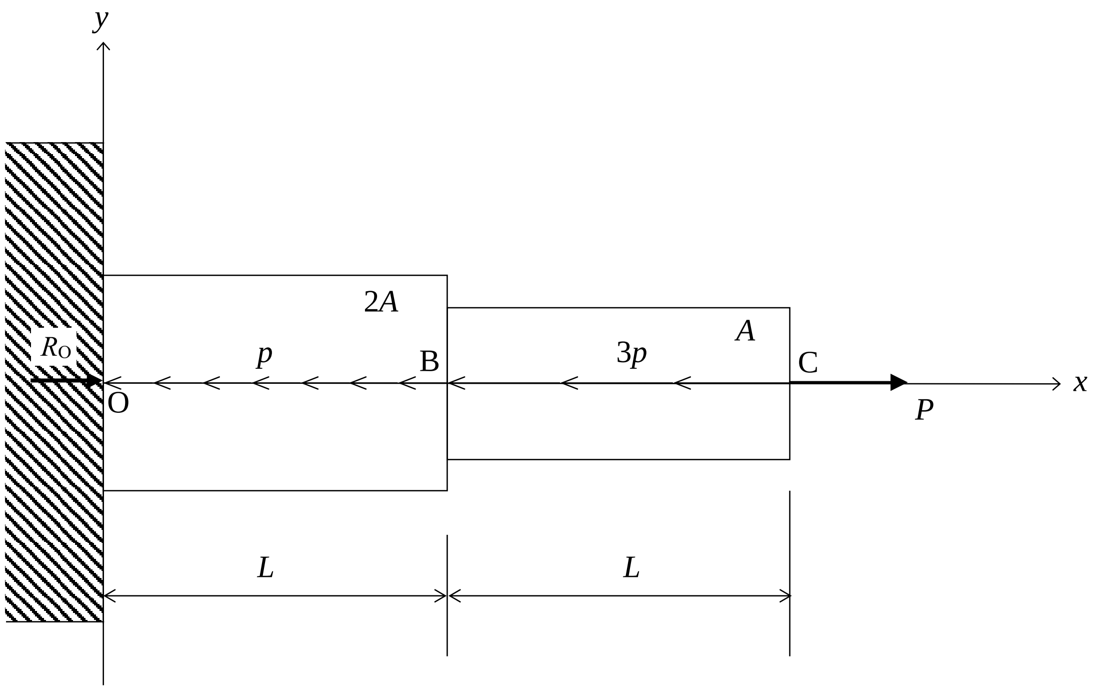


Fig. 1 分布荷重と集中荷重を受ける段付き丸棒.

(1) 丸棒全体の FBD を描き，壁からの反力 R_O を求めよ．

(2) 丸棒に作用する任意の x における軸力 $N(x)$を求め，図示せよ．ただし，$0 < P < 3pL$ とし，N(x)の正負に留意して作図せよ．

(3) C 点における変位δ_Cを求めよ．

(4) $\delta_C = 0$ のとき，R_O を求めよ．ただし P を含まない形とすること．

[1]

(1) 丸棒全体の FBD を描き，壁からの反力 R_O を求めよ．

丸棒全体の FBD を描くと以下のようになる．

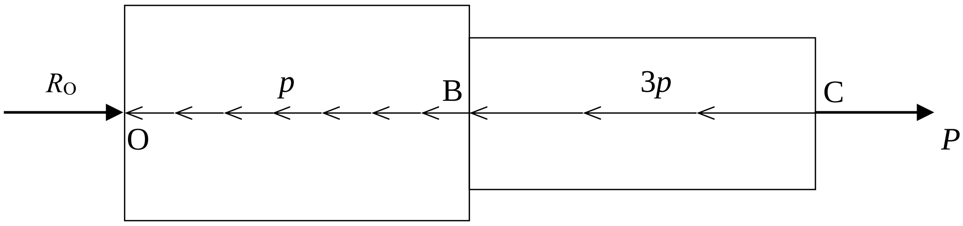


Fig. 1.1 FBD.

力のつり合いより，

$$\begin{aligned} &P + R_O - pL - 3pL = 0 \\ &\therefore R_O = -P + 4pL \end{aligned} \tag{1.1}$$

(2) 丸棒に作用する任意の x における軸力 $N(x)$を求め，図示せよ．ただし，$0 < P < 3pL$ とし，$N(x)$の正負に留意して作図せよ．

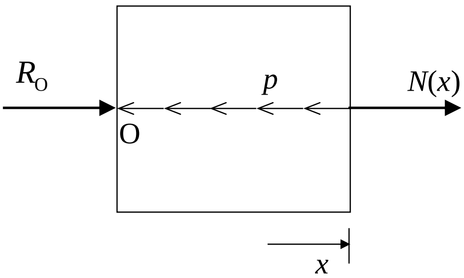
$0 \le x \le L$，$L \le x < 2L$ のそれぞれの範囲において軸力 $N(x)$を考える

(i) $0 \le x \le L$ のとき

力のつり合いより，

$$N(x) + R_O - px = 0$$

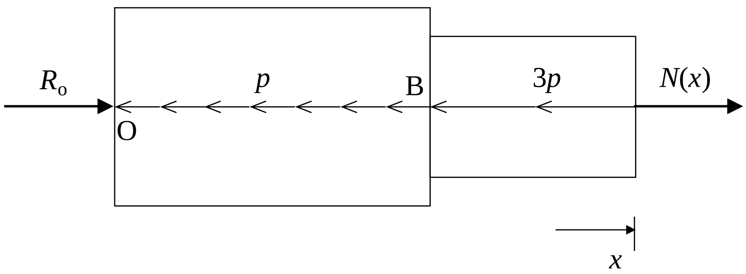
$$\begin{aligned} N(x) &= px - R_O \\ &= P - (4L - x)p \end{aligned} \tag{1.2}$$



(ii) $L \le x < 2L$ のとき
力のつり合いより，

$$N(x) + R_{\mathrm{O}} - 3p(x-L) - pL = 0$$

$$\begin{aligned} N(x) &= pL + 3p(x-L) - R_{\mathrm{O}} \\ &= P - (6L - 3x)p \end{aligned} \tag{1.3}$$



式(1.2)，式(1.3)より，設問中の条件を加味して $N(x)$を図示すると以下のようになる．

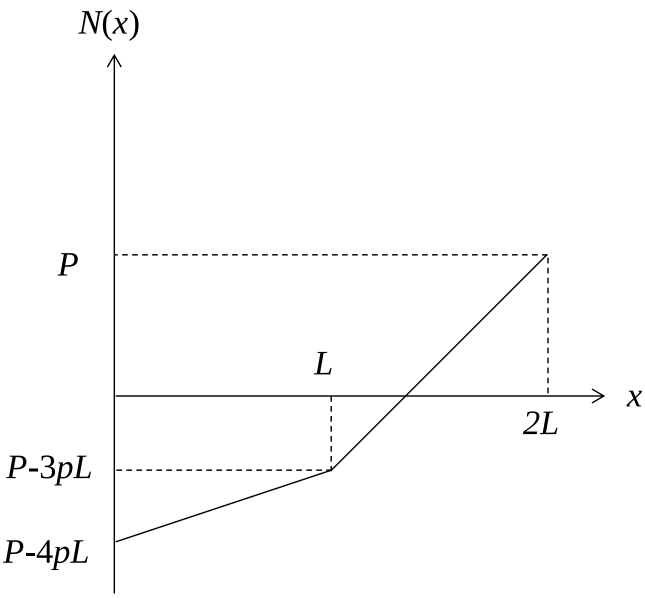


Fig. 1.2 丸棒に作用する軸力 $N(x)$.

(3) C 点における変位δ_{C}を求めよ.

まず，$0 \le x \le L$，$L < x < 2L$ それぞれの範囲に働く応力$\sigma(x)$を求める．各範囲における断面積はそれぞれ $2A$，A なので，

$$\begin{cases} \sigma(x) = \dfrac{N(x)}{2A} = \dfrac{P-(4L-x)p}{2A} & (0 \le x \le L) \\ \sigma(x) = \dfrac{N(x)}{A} = \dfrac{P-(6L-3x)p}{A} & (L \le x < 2L) \end{cases} \tag{1.4}$$

変位はひずみを積分することによって求められる．ひずみは応力を弾性率で除することで得られるので，求めるδ_Cは，

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{C}} &= \int_0^{2L} \frac{\sigma(x)}{E} dx \\ &= \int_0^{L} \frac{P-(4L-x)p}{2EA} dx + \int_L^{2L} \frac{P-(6L-3x)p}{EA} dx \\ &= \frac{1}{2EA}\left[Px - 4Lpx + \frac{p}{2}x^2 \right]_0^L + \frac{1}{EA}\left[Px - 6Lpx + \frac{3p}{2}x^2 \right]_L^{2L} \\ &= \frac{1}{2EA}\left(PL - \frac{7}{2}pL^2 \right) + \frac{1}{EA}\left(PL - \frac{3}{2}pL^2 \right) \\ &= \frac{L}{2EA}\left(3P - \frac{13}{2}pL \right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

(4) $\delta_{\mathrm{C}} = 0$ のとき，R_{O} を求めよ．ただし P を含まない形とすること．

$\delta_{\mathrm{C}} = 0$ なので式(1.5)より，

$$\frac{L}{2EA}\left(3P - \frac{13}{2}pL \right) = 0$$

$$\therefore P = \frac{13}{6}pL \tag{1.6}$$

よって式(1.1)より，

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{O}} &= -P + 4pL \\ &= -\frac{13}{6}pl + 4pL = \frac{11}{6}pL \end{aligned} \tag{1.7}$$

以上の結果は，本問のような分布荷重を受ける丸棒の両端が壁に固定されている場合，丸棒は両端の壁からそれぞれ$\dfrac{11}{6}pL$，$\dfrac{13}{6}pL$の反力を受けることを意味する．

※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みのレポートは 58 号館のレポート返却 BOX にて返却．

[2] 図 2 に示すように，丸棒 1 と 2 本の丸棒 2 が剛体を介して荷重 P を受けている．丸棒は x 軸に平行に配列されており，剛体は x 軸方向にのみ移動可能とする．丸棒 1 と 2 のヤング率を E としたとき，以下の問いに答えよ．

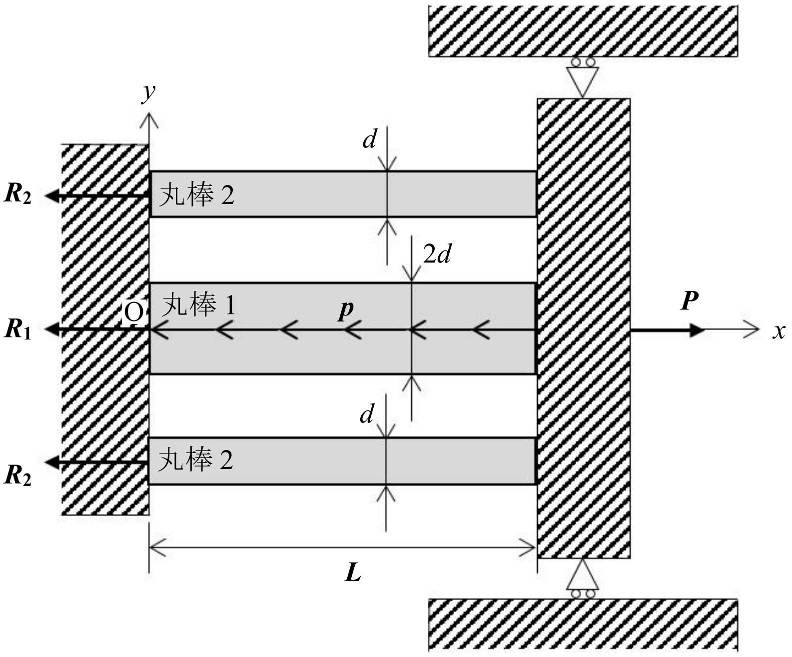


Fig. 2 剛体を介して荷重を受ける丸棒 1，2.

(1) 外力 P，分布荷重 p，反力 R_1，R_2 のつり合い式を示せ．ただし，それぞれの力は図 2 に示した矢印の向きに応じて正負を決定すること．

(2) 丸棒 1，丸棒 2 に作用する任意の位置 x における軸力 $N_1(x)$，$N_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ．

(3) 丸棒 1，丸棒 2 に作用する任意の位置 x における垂直応力 $\sigma_1(x)$，$\sigma_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ．

(4) 丸棒 1，丸棒 2 の右端における変位 δ_1，δ_2 を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ．

(5) 右端の剛体による拘束条件(δ_1=δ_2)を用いて，反力 R_1，R_2 をそれぞれ求めよ．

[2]

(1) 外力 P，分布荷重 p，反力 R_1，R_2 のつり合い式を示せ．ただし，それぞれの力は図 2 に示した矢印の向きに応じて正負を決定すること．

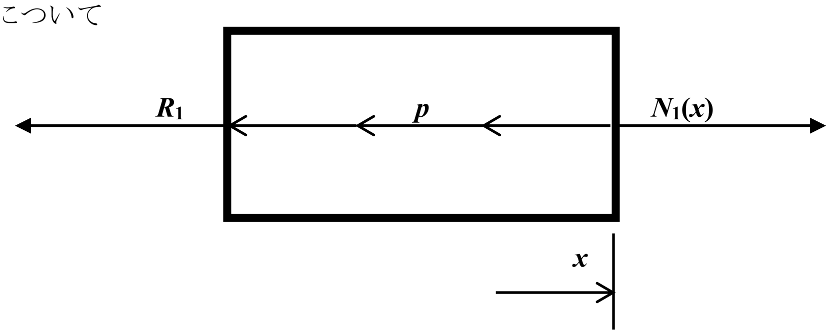
図 2 より，つり合い式は以下のようになる．

$$-R_1 - 2R_2 - pL + P = 0 \tag{2.1}$$

(2) 丸棒 1，丸棒 2 に作用する任意の位置 x における軸力 $N_1(x)$，$N_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ．

任意の位置 x における仮想断面を考え，それぞれの丸棒に作用する軸力を考える．

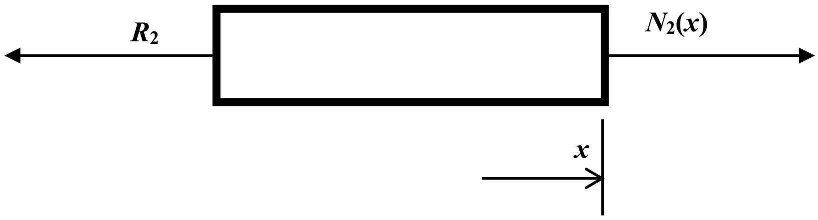
(i) 丸棒 1 について



力のつり合いより，以下のようになる．

$$\begin{aligned} &-R_1 - px + N_1(x) = 0 \\ &\therefore N_1(x) = R_1 + px \end{aligned} \tag{2.2}$$

(ii) 丸棒 2 について



力のつり合いより，以下のようになる．

$$\begin{aligned} &-R_2 + N_2(x) = 0 \\ &\therefore N_2(x) = R_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

(3) 丸棒 1，丸棒 2 に作用する任意の位置 *x* における垂直応力 $\sigma_1(x)$，$\sigma_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ.

(i) 丸棒 1 について

丸棒 1 は直径 2*d* であるから，断面積 A_1 は，

$$A_1 = \pi\left(\frac{2d}{2}\right)^2 = \pi d^2 \tag{2.4}$$

と表されるため，垂直応力は以下のようになる.

$$\sigma_1(x) = \frac{N_1(x)}{A_1} = \frac{R_1 + px}{\pi d^2} \tag{2.5}$$

(ii) 丸棒 2 について

丸棒 2 は直径 *d* であるから，断面積 A_2 は，

$$A_2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4} \tag{2.6}$$

と表されるため，垂直応力は以下のようになる.

$$\sigma_2(x) = \frac{N_2(x)}{A_2} = \frac{4R_2}{\pi d^2} \tag{2.7}$$

(4) 丸棒 1，丸棒 2 の右端における変位 δ_1，δ_2 を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ.

丸棒のヤング率はともに *E* であり，変位は$\delta = \int \varepsilon dx$ の式で求められる.

(i) 丸棒 1 について

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \int_0^L \varepsilon_1(x)dx = \int_0^L \frac{\sigma_1(x)}{E}dx = \frac{1}{\pi E d^2}\int_0^L (R_1 + px)dx \\ &= \frac{1}{\pi E d^2}\left[R_1 x + \frac{1}{2}px^2\right]_0^L = \frac{1}{\pi E d^2}\left(R_1 L + \frac{1}{2}pL^2\right)\end{aligned} \tag{2.8}$$

(ii) 丸棒 2 について

$$\delta_2 = \int_0^L \varepsilon_2(x)dx = \int_0^L \frac{\sigma_2(x)}{E}dx = \frac{4}{\pi E d^2}\int_0^L R_2 dx = \frac{4R_2 L}{\pi E d^2} \tag{2.9}$$

(5) 右端の剛体による拘束条件($\boldsymbol{\delta_1=\delta_2}$)を用いて，反力 $\boldsymbol{R_1}$，$\boldsymbol{R_2}$ をそれぞれ求めよ．

拘束条件 $\delta_1=\delta_2$ より，

$$\frac{1}{\pi E d^2}\left(R_1 L+\frac{1}{2}pL^2\right)=\frac{4R_2 L}{\pi E d^2} \tag{2.10}$$

式(2.10)を整理すると，

$$R_1 = 4R_2-\frac{1}{2}pL \tag{2.11}$$

となる．式(2.11)を式(2.1)に代入して整理すると，R_2 が次のように求められる．

$$\begin{aligned} &-\left(4R_2-\frac{1}{2}pL\right)-2R_2-pL+P=0 \\ &\therefore R_2=\frac{2P-pL}{12} \end{aligned} \tag{2.12}$$

式(2.12)を式(2.11)に代入して整理すると，R_1 が次のように求められる．

$$R_1 = 4\left(\frac{2P-pL}{12}\right)-\frac{1}{2}pL=\frac{4P-5pL}{6} \tag{2.13}$$

このように，力のつり合いだけでは外力や反力を決定できず，変形の条件を考慮する必要があるものを不静定という．