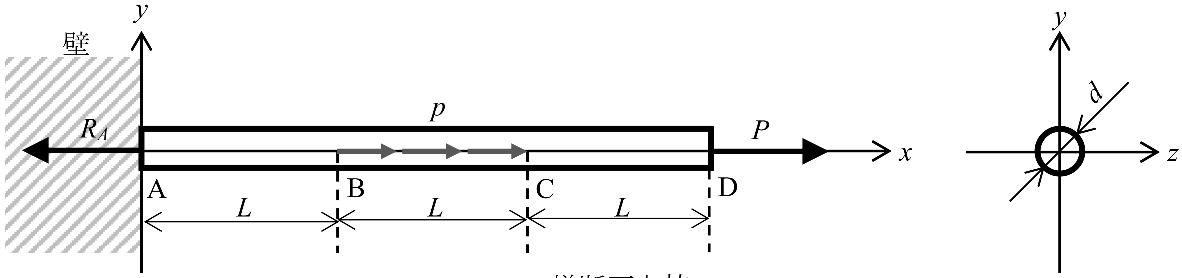
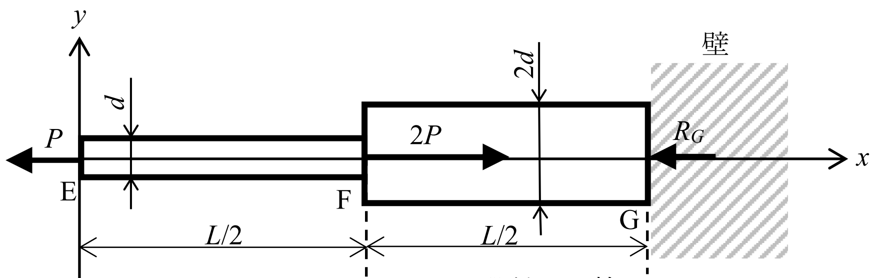
※解答の導出過程がないレポートは認めない．
採点済みレポートは次回演習時に返却．欠席の場合は 58 号館レポート BOX にて返却．

材料の力学 1　Step1　第 1 回演習問題(2017/4/18 実施)

[1] 一端が壁に固定された一様断面丸棒(a)，段付き丸棒(b)があり，図 1 のように力が作用している．壁からの反力 R_A， R_G を図 1 のように仮定し，以下の問いに答えよ．ただし，ヤング率を E とし，丸棒の径は図中に示す．



(a) 一様断面丸棒



(b) 段付き丸棒

Fig.1 壁に固定された丸棒.

(1) (a)，(b)の FBD をそれぞれ描き，壁からの反力 R_A，R_G を求めよ．

(2) (a)，(b)に作用している軸力 $N(x)$の x 方向変化を縦軸:N，横軸:x としてそれぞれ図示せよ．

(3) (a)，(b)に作用している垂直応力 $\sigma(x)$の x 方向変化を縦軸:σ，横軸:x としてそれぞれ図示せよ．

(4) (a), (b)のそれぞれの変位量 δ_a，δ_b を求めよ．また，それぞれが伸びるか縮むか答えよ．ただし変位量 δ は次式で表される．

$$\delta = \int \varepsilon(x) dx$$

(1) (a)，(b)の FBD をそれぞれ描き，壁からの反力 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}$ を求めよ．

(a) FBD は,

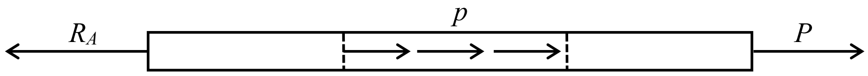


Fig.1.1 (a)の FBD.

と表される．

つりあいの式より，反力 R_A は,

$$-R_A + pL + P = 0$$

$$R_A = P + pL \tag{1.1}$$

と表される．

(b) FBD は,

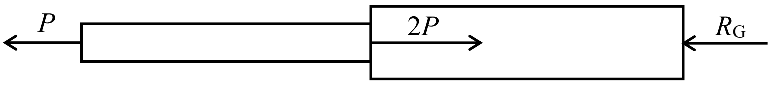


Fig.1.2 (b)の FBD.

と表される．

つりあいの式より，反力 R_G は,

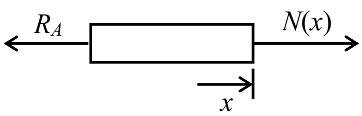
$$-P + 2P - R_G = 0$$

$$R_G = P \tag{1.2}$$

と表される．

(2) (a)，(b)に作用している軸力 $\boldsymbol{N(x)}$の $\boldsymbol{x}$ 方向変化を縦軸:$\boldsymbol{N}$，横軸:$\boldsymbol{x}$ としてそれぞれ図示せよ．

(a) $0 \leqq x < L$ の場合の FBD は,



と表される．

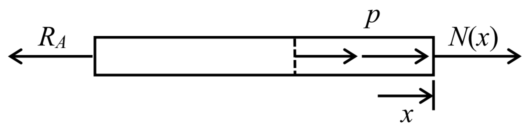
つりあいの式より，軸力 $N(x)$は,

$$-R_A + N(x) = 0$$

$$\begin{aligned} N(x) &= R_A \\ &= P + pL \end{aligned} \tag{1.3}$$

と表される．

$L \leqq x < 2L$ の場合の FBD は,



と表される.

つりあいの式より，軸力 $N(x)$は,

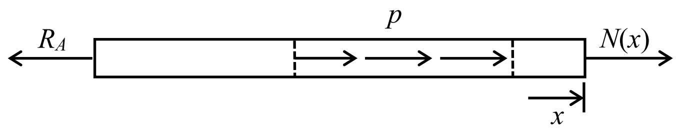
$$-R_A + p(x-L) + N(x) = 0$$

$$N(x) = R_A - p(x-L)$$

$$= P + 2pL - px \tag{1.4}$$

と表される.

$2L \leqq x < 3L$ の場合の FBD は,



と表される.

つりあいの式より，軸力 $N(x)$は,

$$-R_A + pL + N(x) = 0$$

$$N(x) = R_A - pL$$

$$= P \tag{1.5}$$

と表される.

よって，軸力 $N(x)$の x 方向変化を図示すると,

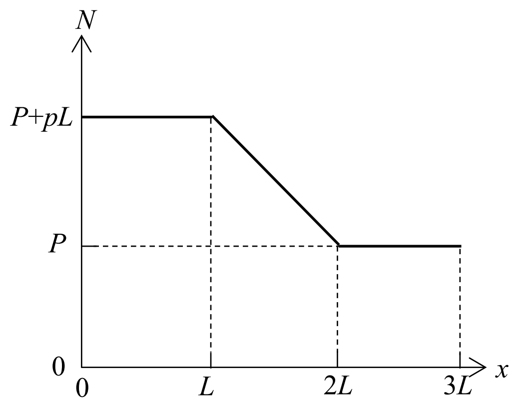
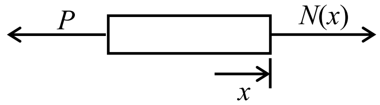


Fig.1.3 (a)に作用する軸力.

(b) $0 \leqq x < L/2$ の場合の FBD は,



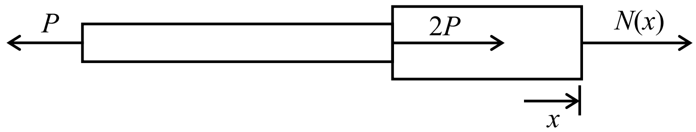
と表される.

つりあいの式より，軸力 $N(x)$は,

$$-P+N(x)=0$$
$$N(x)=P \tag{1.6}$$

と表される．

$L/2 \leqq x < L$ の場合の FBD は,



と表される．

つりあいの式より，軸力 $N(x)$は,

$$-P+2P+N(x)=0$$
$$N(x)=-P \tag{1.7}$$

と表される．

よって，軸力 $N(x)$の x 方向変化を図示すると,

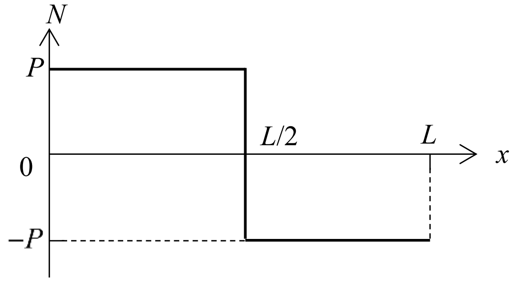


Fig.1.4 (b)に作用する軸力.

(3) (a), (b)に作用している垂直応力$\sigma(x)$の x 方向変化を縦軸:σ，横軸:x としてそれぞれ図示せよ．

垂直応力 $\sigma(x)$は,

$$\sigma(x)=N(x)/A \tag{1.8}$$

で表される．

A は断面積とする．

(a)の断面積は,

$$A=\frac{\pi d^2}{4} \tag{1.9}$$

である．

よって，垂直応力 $\sigma(x)$は,

$$\sigma(x)=\frac{4}{\pi d^2}\left(P+pL\right) \qquad (0\leqq x<L) \tag{1.10}$$

$$\sigma(x)=\frac{4}{\pi d^2}\left(P+2pL-px\right) \qquad (L\leqq x<2L) \tag{1.11}$$

$$\sigma(x)=\frac{4}{\pi d^2}P \qquad (2L\leqq x\leqq 3L) \tag{1.12}$$

で表される.

垂直応力 $\sigma(x)$の x 方向変化を図示すると,

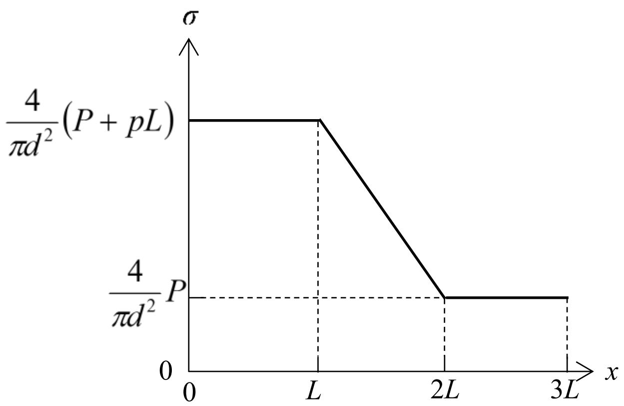


Fig.1.5 (a)に作用する応力.

(b)の断面積は,

$$A=\frac{\pi d^2}{4} \quad (0\leqq x<L/2), \qquad A=\pi d^2 \quad (L/2\leqq x<L) \tag{1.13}$$

である.

よって，垂直応力 $\sigma(x)$は,

$$\sigma(x)=\frac{4P}{\pi d^2} \qquad (0\leqq x<L/2) \tag{1.14}$$

$$\sigma(x)=-\frac{P}{\pi d^2} \qquad (L/2\leqq x<L) \tag{1.15}$$

で表される.

垂直応力 $\sigma(x)$の x 方向変化を図示すると，

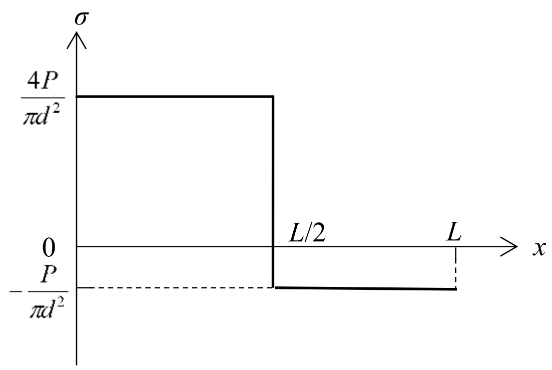


Fig.1.6 (b)に作用する応力.

(4) (a)，(b)のそれぞれの変位量δ_a，δ_b を求めよ．また，それぞれ伸びるか縮むか答えよ．ただし変位量δ は次式で表される．

$$\delta = \int \varepsilon(x) dx \tag{1.16}$$

$\varepsilon(x) = \sigma(x)/E$ を代入すると，

$$E \cdot \delta = \int \sigma(x) dx \tag{1.17}$$

となる.

(a) 変位量δ_a は,

$$E \cdot \delta_a = \int_0^L \frac{4}{\pi d^2}(P + pL)dx + \int_L^{2L} \frac{4}{\pi d^2}(P + 2pL - px)dx + \int_{2L}^{3L} \frac{4}{\pi d^2} Pdx$$

$$= \frac{4}{\pi d^2}\left\{\left(PL + pL^2\right) + \left(PL + 2pL^2 - \frac{3}{2}pL^2\right) + (PL)\right\}$$

$$= \frac{6L}{\pi d^2}(2P + pL) \tag{1.18}$$

$$\therefore \delta_a = \frac{6L}{\pi E d^2}(2P + pL) \tag{1.19}$$

(a)は伸びる.

(b) 変位量δ_bは,

$$E \cdot \delta_b = \int_0^{L/2} \frac{4P}{\pi d^2} dx + \int_{L/2}^{L} (-\frac{P}{\pi d^2}) dx$$

$$= \frac{2PL}{\pi d^2} - \frac{PL}{2\pi d^2} \qquad (1.20)$$

$$\therefore \delta_b = \frac{3PL}{2\pi E d^2} \qquad (1.21)$$

(b)は伸びる.

[2]　図 2 のように, ピンを用いた継手に引張荷重 P が作用している. 以下の問題に答えよ.

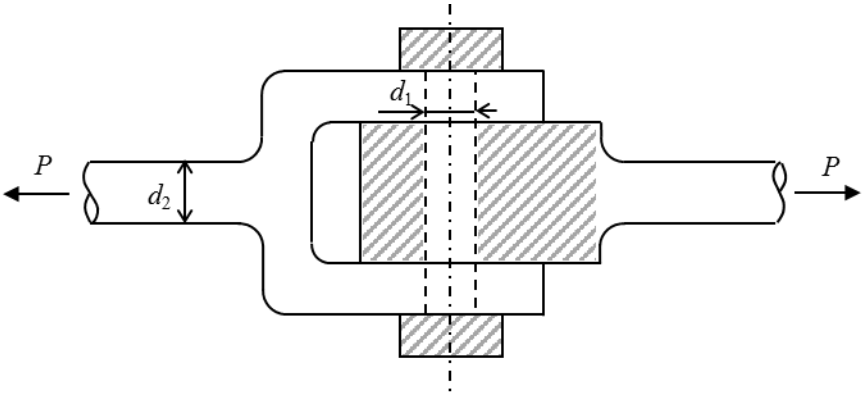


Fig. 2 ピン継手.

(1) ピンの FBD を描け.

(2) ピンに生じるせん断応力 τ を求めよ.

(3) 継手に生じる引張荷重が P=40 [kN], リベットの許容せん断応力が τ_a =70 [MPa], 継手の許容引張応力が σ_a=122 [MPa]のとき, ピンと継手の直径 d_1, d_2 [mm]はそれぞれいくらとすれば良いか, 有効数字 3 桁で求めよ.

[2]

(1) ピンの FBD を描け.

ピンの FBD は次のようになる.

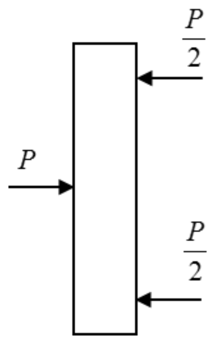


Fig. 2.1 FBD.

(2) ピンに生じるせん断応力τを求めよ.

ピンに作用する力はせん断荷重を考慮すると以下のように表される.

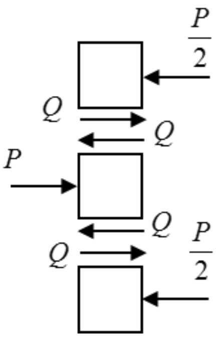


Fig. 2.2 ピンに作用するせん断力.

力のつり合いより，ピンに作用するせん断力 Q は次のようになる.

$$Q = \frac{P}{2} \tag{2.1}$$

ここでピンの直径が d_1[mm]であることから，断面積 A は次のように示される.

$$A = \frac{\pi d_1^{\,2}}{4} \tag{2.2}$$

よってピンに生じるせん断応力τは,

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{2P}{\pi d_1^{\,2}} \tag{2.3}$$

(3) 継手に生じる引張荷重が $\boldsymbol{P}$=40 [kN]，リベットの許容せん断応力が $\boldsymbol{\tau_a}$ =70 [MPa]，継手の許容引張応力が $\boldsymbol{\sigma_a}$ =122 [MPa]のとき，ピンと継手の直径 $\boldsymbol{d_1}$，$\boldsymbol{d_2}$ [mm]はそれぞれいくらとすれば良いか，有効数字 3 桁で求めよ．

せん断応力 τ が，許容せん断応力が τ_a よりも小さくなる必要があるので，両者の関係は以下のようになる．

$$\tau < \tau_a \tag{2.4}$$

ここで，式(2.3)と(2.4)より，d_1 について整理すると，

$$\begin{gathered} \tau = \frac{2P}{\pi {d_1}^2} < \tau_a \\ d_1 > \sqrt{\frac{2P}{\pi \tau_a}} \end{gathered} \tag{2.5}$$

P=40 [kN]，$\tau_a = 70$ [MPa]=70 [N/mm^2]であるので，式(2.5)にそれぞれ代入すると，ピンの直径 d_1 は次のように求められる．

$$d_1 > \sqrt{\frac{2P}{\pi \tau_a}} = \sqrt{\frac{2 \times 40 \times 10^3}{\pi \times 70}} = 19.1[\mathrm{mm}] \tag{2.6}$$

継手についても同様に考えると，生じる引張応力 σ が許容引張応力 σ_a よりも小さくなる必要があるので，

$$\sigma < \sigma_a \tag{2.7}$$

ここで，d_2 について整理すると，

$$\begin{gathered} \sigma = \frac{4P}{\pi {d_2}^2} < \sigma_a \\ d_2 > \sqrt{\frac{4P}{\pi \sigma_a}} \end{gathered} \tag{2.8}$$

ここで $\sigma_a = 122[\mathrm{MPa}]$ であるので，式(2.8)に代入すると継手の直径 d_2 は次のように求められる．

$$d_2 > \sqrt{\frac{4P}{\pi \sigma_a}} = \sqrt{\frac{4 \times 40 \times 10^3}{\pi \times 122}} = 20.4[\mathrm{mm}] \tag{2.9}$$